



TD1 : Langages logiques

Les exercices annotés par le symbole \star correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 1.1 (Formalisation)

1. (Quantificateurs) Préciser à l'aide d'un quantificateur le sens du mot « un » dans les phrases suivantes et les formaliser dans le langage de la logique des prédicats.
 - (1) *Mark suit un cours.*
 - (2) *Un logicien a été champion du monde de natation.*
 - (3) *Un entier naturel est pair ou impair.*
 - (4) *Un enseignant-chercheur a toujours un nouveau sujet à étudier.*
 - (5) *Un étudiant a besoin d'avoir un idéal.*
2. (Langage naturel) Formaliser les énoncés suivants dans le langage de la logique des prédicats.
 - (1) *Tous les étudiants sont doués de raison.*
 - (2) *Seuls les êtres humains sont doués de raison.*
 - (3) *Aucun éléphant n'est doué de raison.*
 - (4) *Tous les animaux, sauf les chiens, sont gentils avec les logiciens.*
 - (5) *Chacun cherche son éléphant.*
 - (6) *Chaque individu aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde.*
3. (Énoncé mathématique)
 - (a) On considère l'énoncé : « Tout nombre entier naturel x a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à x . » Formaliser cet énoncé par une formule logique en utilisant les prédicats suivants :

$\text{entier}(x)$	« x est un entier naturel »
$\text{successeur}(x, y)$	« x est successeur de y »
$\text{inf}(x, y)$	« x est inférieur ou égal à y »
 - (b) On considère le symbole de prédicat p d'arité 2 tel que $p(x_1, x_2)$ signifie « x_1 est un triangle équilatéral de hauteur x_2 ». Formaliser les deux énoncés :
 - (F_1) « il existe au plus un triangle équilatéral dont la hauteur est z »
 - (F_2) « il existe un unique triangle équilatéral dont la hauteur est z »
 où z est un symbole de variable. On pourra utiliser le prédicat $=$ d'arité 2 pour exprimer l'égalité.

Exercice 1.2 (\star) Variables libres, variables liées, clôture universelle

1. On définit la formule $F = \forall y (p(f(g(x), y)) \wedge \forall x (q(g(z), x) \Rightarrow \exists z p(f(z, w))))$ à partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{w, x, y, z\}$.
 - (a) Quels sont les symboles de fonction apparaissant dans cette formule ?
 - (b) Quels sont les symboles de prédicat apparaissant dans cette formule ?
 - (c) Quels sont les termes apparaissant en argument des symboles de prédicat de F ?
 - (d) Déterminer l'ensemble $\text{Free}(F)$ des variables qui ont au moins une occurrence libre dans F .
 - (e) Quelles sont les variables de $\text{Free}(F)$ qui admettent au moins une occurrence liée dans F ?
 - (f) Déterminer une clôture universelle de la formule F .

2. A partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{x, y, z\}$ et $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ on définit la formule $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ suivante : $(\forall x((p(a, x) \wedge q(y, x)) \Rightarrow \exists x p(x, b))) \vee ((\exists y p(x, y)) \wedge q(x, z))$.
 - (a) Dessiner l'arbre de syntaxe abstraite de la formule F .
 - (b) Donner l'ensemble $\text{Free}(F)$.
 - (c) Indiquer, pour chacune des occurrences de x , si elle est quantifiée universellement, existentiellement, ou pas quantifiée.
 - (d) Déterminer une clôture universelle de la formule F .

Exercice 1.3 ((★) Symboles d'une formule)

Soit la formule $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ où $X = \{x, x_1, x_2, x_3, z\}$ définie par :

$$(\forall x (s_1(s_2(x, x)) \wedge \exists x s_1(s_2(x, z)))) \wedge (s_3(s_4(x)) \wedge (\exists x s_1(s_2(x, z))))$$

1. Quels sont les symboles de fonction apparaissant dans F ? Donner l'arité de ces symboles.
2. Quels sont les symboles de prédicat apparaissant dans F ? Donner l'arité de ces symboles.
3. Déterminer l'ensemble $\text{Free}(F)$.
4. Donner une clôture universelle de F .
5. On souhaite renommer certains symboles de variable pour obtenir une formule logiquement équivalente à F et dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents. On propose la formule suivante :

$$(\forall x_1 (s_1(s_2(\square, \square)) \wedge \exists x_2 s_1(s_2(\square, \square)))) \wedge (s_3(s_4(\square)) \wedge (\exists x_3 s_1(s_2(\square, \square))))$$

Remplacer les \square par les symboles de variable appropriés.

Exercice 1.4 ((★) Symboles d'une formule)

1. On considère les symboles s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 et s_6 appartenant à $X \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ à partir desquels on définit la formule $F = \forall s_1 (s_2(s_3(s_1, s_4(s_5)))) \Rightarrow s_6(s_4(s_1), s_5)$.
 - (a) Quelles sont les formules atomiques apparaissant dans F ?
 - (b) Déterminer à quel ensemble chacun des symboles s_1, s_2, s_3, s_4 et s_6 appartient (c-à-d déterminer s'il s'agit d'un symbole de variable de X , d'un symbole de fonction de \mathcal{F} ou d'un symbole de prédicat de \mathcal{P}).
 - (c) Que peut-on dire du symbole s_5 ? A quels ensembles peut-il appartenir?
 - (d) Quels sont les termes apparaissant en argument des symboles de prédicat de F ?
2. On considère les symboles s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 et s_6 appartenant à $X \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ à partir desquels on définit la formule $F = \exists s_3 ((s_1(s_2, s_3) \wedge s_4(s_5(s_2))) \Rightarrow \forall s_6 s_1(s_5(s_6), s_3))$.
 - (a) Quelles sont les formules atomiques apparaissant dans F ?
 - (b) Déterminer à quels ensembles chacun des symboles s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 et s_6 peut appartenir (c-à-d déterminer s'il peut s'agir d'un symbole de variable de X , d'un symbole de constante de \mathcal{F}_0 , d'un symbole de fonction de \mathcal{F} ou d'un symbole de prédicat de \mathcal{P}).

Exercice 1.5 ((★) Occurrences libres et liées d'une variable, Clôture universelle)

A partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{x, y, z, w_1, w_2, w_3, \dots\}$ on définit la formule $F = p(a, g(h(x), b)) \wedge \forall x (\exists x \forall z p(x, f(b, y, z)) \vee \exists y q(x, h(y), z))$.

1. Déterminer l'ensemble $\text{Free}(F)$ des variables qui ont au moins une occurrence libre dans F .
2. Le symbole de variable x admet 3 occurrences dans la formule F , numérotées de 1 à 3 comme suit :

$$p(a, g(h(\underbrace{x}_1), b)) \wedge \forall x (\exists x \forall z p(\underbrace{x}_2, f(b, y, z)) \vee \exists y q(\underbrace{x}_3, h(y), z))$$

Pour chacune de ces occurrences, déterminer si elle correspond à une occurrence libre de x , à une occurrence quantifiée universellement ($\forall x$) de x ou bien à une occurrence quantifiée existentiellement ($\exists x$) de x .

3. Déterminer une clôture universelle de la formule F .
4. Proposer une formule logique F' ayant la même signification que F , telle que $\text{Free}(F') \cap \text{Bound}(F') = \emptyset$ et dans laquelle chaque symbole de variable est dans la portée d'au plus un quantificateur.

Exercice 1.6 (★) Construction de formules)

Soit $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ la formule représentée par :

$$(\forall y \square (\square, \square (\square, \square))) \Rightarrow ((\square \square \exists \square \square (\square (\square, \square))) \vee \square (\square, \square))$$

où chaque case peut contenir un unique symbole : soit un quantificateur, soit un symbole de l'ensemble $X = \{x, y, z\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_0 = \{k\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{f\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 = \{p\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{q\}$. On souhaite que F vérifie les contraintes suivantes :

- x admet uniquement deux occurrences libres et une occurrence liée par le quantificateur \forall dans F ,
 - y admet uniquement une occurrence liée par le quantificateur \forall et une occurrence liée par le quantificateur \exists dans F ,
 - z admet uniquement une occurrence libre dans F ,
1. Remplir les cases de F pour que les contraintes soient respectées.
 2. Dessiner l'arbre de syntaxe de la formule F et encadrer les occurrences libres de variable.
 3. Proposer une clôture universelle F' de F puis renommer certains symboles de variable de F' pour obtenir une formule F'' logiquement équivalente à F' et dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents.

Exercice 1.7 (★) Formules et substitutions)

A partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{x, y, z\}$ on définit les formules ci-dessous :

$$\begin{aligned} F_1 &= \forall x (p(x, y, z) \Rightarrow \exists y (q(f(x, y), z) \vee \forall z (q(f(x, z), f(y, a)))))) \\ F_2 &= \forall x ((\exists z p(x, y, z)) \vee (\neg \forall y (q(f(x, y), z) \wedge q(f(x, z), f(y, a))))) \end{aligned}$$

1. Quels sont les symboles de fonction et de constante apparaissant dans F_1 ? dans F_2 ?
2. Quels sont les symboles de prédicat apparaissant dans F_1 ? dans F_2 ?
3. Déterminer les ensembles $\text{Free}(F_1)$ et $\text{Free}(F_2)$.
4. Déterminer une clôture universelle de F_1 et de F_2 .
5. Calculer :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & F_1[x := f(y, a)] \text{ et } F_2[x := f(y, a)] & \text{(b)} \quad & F_1[y := f(x, z)] \text{ et } F_2[y := f(x, z)] \\ \text{(c)} \quad & F_1[z := f(y, a)] \text{ et } F_2[z := f(y, a)] \end{aligned}$$

Exercice 1.8 ((★) Formules et substitutions)

Soit F la formule : $(\exists x (p(x, f(x)) \Rightarrow \forall x q(x))) \wedge (q(x) \vee \forall x p(f(x), x))$.

1. Dessiner l'arbre de syntaxe abstraite de la formule F .
2. On numérote les occurrences du symbole de variable x comme suit :

$$\left(\exists x \left(p(x_{(1)}, f(x_{(2)})) \Rightarrow \forall x q(x_{(3)}) \right) \right) \wedge \left(q(x_{(4)}) \vee \forall x p(f(x_{(5)}), x_{(6)}) \right)$$

Indiquer pour chacune des six occurrences de x s'il s'agit d'une occurrence quantifiée universellement, d'une occurrence quantifiée existentiellement ou d'une occurrence libre.

3. Calculer $F[x := h(z, w)]$. On note $F_1 = F[x := h(z, w)]$ cette formule.
4. Soit $F_2 = \forall z F_1$. Calculer $F_2[w := g(x, z, w)]$. On note $F_3 = F_2[w := g(x, z, w)]$ cette formule.
5. Déterminer $\text{Free}(F_3)$.
6. Déterminer une clôture universelle de F_3 .
7. Donner une formule logiquement équivalente à F_3 telle que chaque quantificateur porte sur un symbole de variable différent qui n'admet aucune occurrence libre dans la formule.

Exercice 1.9 ((★) Substitutions)

1. Soit F la formule $\exists y ((\forall y q(z, f(y, x))) \wedge p(y)) \Rightarrow q(f(x, y), z)$ (où x, y et z sont des symboles de variable). Calculer $F[x := g(x, y, z)]$ et $F[y := g(x, y, z)]$.
2. Soit F la formule $\forall x (q(x, y) \vee \exists x p(x, y, z))$ (où x, y et z sont des symboles de variable). Calculer $F[x := f(x, y, z)]$ et $F[y := f(x, y, z)]$.

Exercice 1.10 (Expressions arithmétiques : définitions inductives)

On considère l'ensemble des expressions arithmétiques défini par l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ construit à partir d'un ensemble X de variables, et de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{F}_2 = \{+, -, \times, /\}$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.
2. Donner une définition inductive du nombre d'occurrences d'opérateurs $n_{\text{op}}(e)$, du nombre d'occurrences de constantes $n_{\text{cst}}(e)$ et du nombre d'occurrences de variables $n_{\text{var}}(e)$ dans une expression arithmétique e .
3. Particulariser le schéma de raisonnement par induction sur $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.
4. Montrer par induction que pour toute expression e on a :

$$n_{\text{op}}(e) = n_{\text{var}}(e) + n_{\text{cst}}(e) - 1$$



TD2 : Règles de déduction sur les connecteurs

Les exercices annotés par le symbole \star correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 2.1 (Règles de la Déduction Naturelle)

On considère la preuve de la figure 1. Quelles sont les règles de la déduction naturelle utilisées dans cette preuve? Remplacer les « ? » par les noms de règle. Pouvez-vous trouver une preuve « plus simple » de la formule $(A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$?

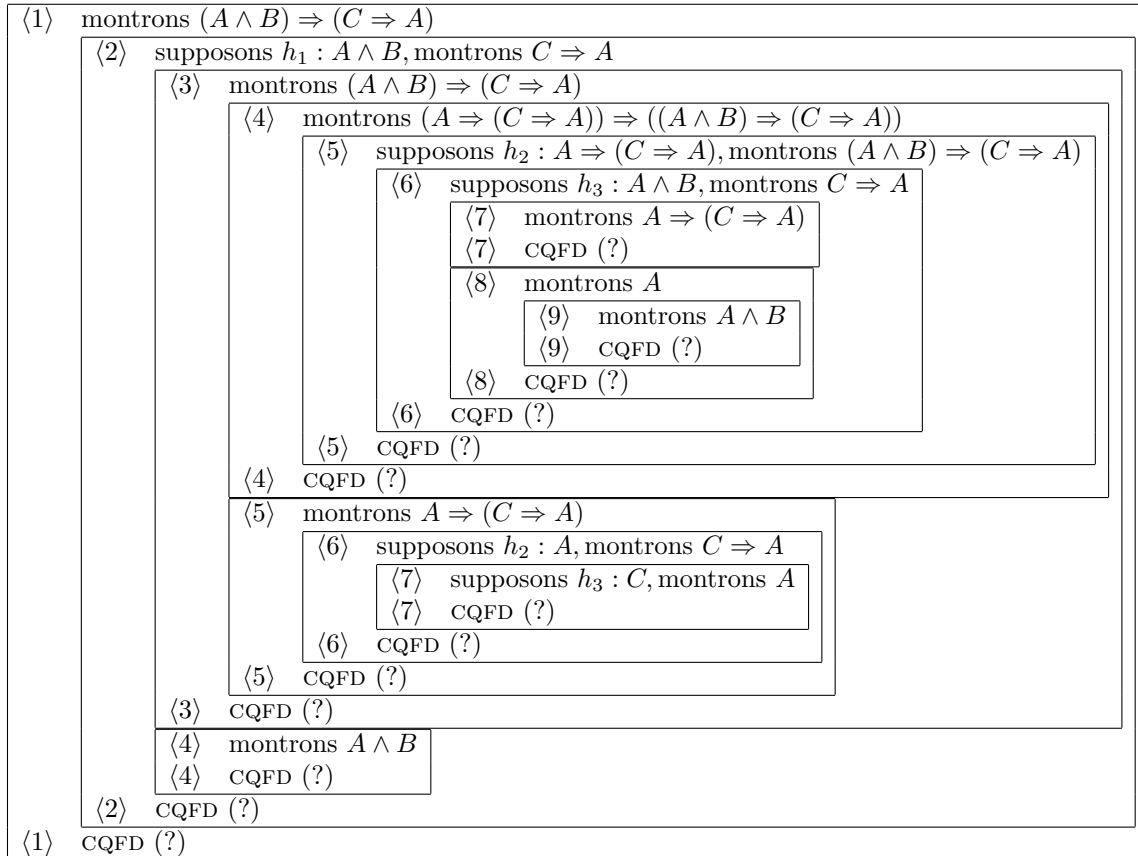


FIGURE 1 – Preuve de l'exercice 2.1

Exercice 2.2 (Connecteurs logiques)

Avec le système de la déduction naturelle, prouver les formules ci-dessous.

1. Implication et conjonction

- $(F_{1.1}) \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B))$
- $(F_{1.2}) \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
- $(F_{1.3}) \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C)))$
- $(\star) \quad (F_{1.4}) \quad (((A \wedge B) \Rightarrow C) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
- $(F_{1.5}) \quad (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$
- $(F_{1.6}) \quad ((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$

2. Implication, conjonction et disjonction

- $(F_{2.1}) \quad A \Rightarrow (A \wedge (A \vee B))$
- (★) $(F_{2.2}) \quad (A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$
- $(F_{2.3}) \quad ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \Rightarrow (A \wedge (B \vee C))$
- $(F_{2.4}) \quad ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$
- $(F_{2.5}) \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \vee C) \Rightarrow (B \vee C))$
- $(F_{2.6}) \quad (A \vee (B \vee C)) \Rightarrow ((A \vee B) \vee C)$
- $(F_{2.7}) \quad ((A \wedge B) \vee (A \vee B)) \Rightarrow (A \vee B)$
- (★) $(F_{2.8}) \quad ((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- (★) $(F_{2.9}) \quad (A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B)$
- (★) $(F_{2.10}) \quad (A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C))$

3. Implication, conjonction, disjonction et négation

- (★) $(F_{3.1}) \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $(F_{3.2}) \quad (A \wedge \neg(A \wedge B)) \Rightarrow \neg B$
- $(F_{3.3}) \quad (A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$
- (★) $(F_{3.4}) \quad (\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- (★) $(F_{3.5}) \quad ((A \vee \neg B) \wedge B) \Rightarrow A$
- (★) $(F_{3.6}) \quad ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- (★) $(F_{3.7}) \quad (\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- (★) $(F_{3.8}) \quad (A \wedge B) \Rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- (★) $(F_{3.9}) \quad A \Rightarrow ((\neg A \vee B) \Rightarrow B)$
- (★) $(F_{3.10}) \quad (B \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B))$
- (★) $(F_{3.11}) \quad ((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$
- (★) $(F_{3.12}) \quad (A \vee \neg(B \vee C)) \Rightarrow (\neg C \vee A)$
- (★) $(F_{3.13}) \quad ((A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)) \Rightarrow (A \vee B)$
- (★) $(F_{3.14}) \quad (A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \vee (A \Rightarrow C))$

4. Raisonnement par l'absurde, tiers exclu

- $(F_{4.1}) \quad (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- $(F_{4.2}) \quad A \vee (A \Rightarrow B)$
- (★) $(F_{4.3}) \quad (A \Rightarrow \neg A) \vee (\neg A \Rightarrow A)$
- (★) $(F_{4.4}) \quad (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$
- $(F_{4.5}) \quad \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $(F_{4.6}) \quad A \Rightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B))$
- $(F_{4.7}) \quad ((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
- $(F_{4.8}) \quad ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee B)$
- (★) $(F_{4.9}) \quad ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- (★) $(F_{4.10}) \quad (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
- (★) $(F_{4.11}) \quad (\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \Rightarrow A$
- (★) $(F_{4.12}) \quad ((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)) \Rightarrow (A \vee (B \Rightarrow C))$
- (★) $(F_{4.13}) \quad \neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$

Exercice 2.3 Anissa, Boris et Julie ont un examen de logique à passer. On suppose que : (A) l'un des trois au moins révisera pour l'examen ; (B) si Anissa ne révisé pas, alors Boris non plus ; (C) si Anissa révisé, alors Julie aussi. En utilisant le système de la déduction naturelle, prouver que Julie révisera son examen (on pourra utiliser la formule $(F_{4.1})$ de l'exercice 2.2 sans la redémontrer).

Exercice 2.4 Anna et Mathias sont accusés d'un crime et déclarent :

Anna : « *Mathias est coupable.* »

Mathias : « *Nous sommes tous les deux innocents.* »

1. On suppose que tous les deux ont menti. Peut-on déterminer qui est coupable, qui ne l'est pas ?
2. On suppose maintenant que les coupables mentent et que les innocents disent la vérité. Peut-on déterminer qui est coupable, qui ne l'est pas ?

Formaliser vos raisonnements en utilisant le système de la déduction naturelle (on pourra utiliser la formule $(F_{3.1})$ de l'exercice 2.2 sans la redémontrer).

Exercice 2.5 Anna et Julie sont interrogées au sujet d'un crime et déclarent :

Anna : « *Julie est coupable.* »

Julie : « *Si je suis coupable, alors Anna l'est aussi.* »

1. Montrer que l'une au moins des deux déclarations est vraie.
2. On suppose maintenant que les innocents disent la vérité et que les coupables mentent. Montrer qu'exactlyement l'une des deux est coupable.

Formaliser vos raisonnements en utilisant le système de la déduction naturelle.



TD3 : Interprétation des fonctions, des prédicats et des connecteurs

Les exercices annotés par le symbole \star correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 3.1 ((\star)) Interprétation des termes)

1. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonctions avec $\mathcal{F}_0 = \{k_1, k_2\}$, $\mathcal{F}_1 = \{f\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{g\}$.

- (a) Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \{k_1, k_2, f, g\}$.

On définit une structure \mathbf{M} dont le domaine est l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels comme suit :

$$\begin{aligned} k_1^{\mathbf{M}} &= 3 & f^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & g^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ k_2^{\mathbf{M}} &= 1 & f^{\mathbf{M}}(n) &= n & g^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) &= n_1 \times n_2 \end{aligned}$$

- (b) Calculer $[g(f(k_1), g(k_2, k_1))]^{\mathbf{M}}$.

- (c) Montrer par induction que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $[t]^{\mathbf{M}} = 3^n$.

2. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{r, s\}$.

- (a) Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \{a, b, r, s\}$.

On définit une structure \mathbf{M} dont le domaine d'interprétation est l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs comme suit :

$$\begin{aligned} a^{\mathbf{M}} &= 2 & r^{\mathbf{M}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} & s^{\mathbf{M}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ b^{\mathbf{M}} &= 0 & r^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) &= n_1 + n_2 & s^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) &= n_1 - n_2 \end{aligned}$$

- (b) Calculer $[s(s(b, a), r(a, b))]^{\mathbf{M}}$.

- (c) Montrer par induction que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe un entier $z \in \mathbb{Z}$ tel que $[t]^{\mathbf{M}} = 2 \times z$.

3. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_2 = \{\otimes\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$ et $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$.

- (a) Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

- (b) On définit une structure \mathbf{M} dont le domaine d'interprétation est l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels comme suit :

$$\begin{aligned} a^{\mathbf{M}} &= 2 & \odot^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & \otimes^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ b^{\mathbf{M}} &= 4 & \odot^{\mathbf{M}}(n) &= 2 * n & \otimes^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) &= n_1 * n_2 \end{aligned}$$

- i. Calculer $[\otimes(\odot(b), a)]^{\mathbf{M}}$

- ii. Montrer que pour tout $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[t]^{\mathbf{M}} = 2^n$.

Exercice 3.2 ((\star)) Entiers naturels et Termes)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{s\}$. Etant donné un entier naturel n , on note $s^n(a)$ le terme :

$$s^n(a) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ s(s^k(a)) & \text{si } n = k + 1 \end{cases}$$

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
2. Montrer que $\mathcal{T}_0(\mathcal{F}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{s^n(a)\}$.
3. Pour chacune des structures \mathbf{M} suivantes, exprimer $[s^n(a)]^{\mathbf{M}}$ en fonction de n .
 - (a) \mathbf{M} est la structure de domaine \mathbb{N} telle que $a^{\mathbf{M}} = 0$ et $s^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction définie par $s^{\mathbf{M}}(n) = n + 1$.
 - (b) \mathbf{M} est la structure de domaine \mathbb{N} telle que $a^{\mathbf{M}} = 1$ et $s^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction définie par $s^{\mathbf{M}}(n) = 2n$.
 - (c) \mathbf{M} est la structure de domaine \mathbb{N} telle que $a^{\mathbf{M}} = 1$ et $s^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction définie par $s^{\mathbf{M}}(n) = n + 2$.
4. On définit une structure \mathbf{M} dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels comme suit :

$$a^{\mathbf{M}} = (0, 1) \quad \begin{array}{l} s^{\mathbf{M}} : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ s^{\mathbf{M}}((n_1, n_2)) = (n_2, n_2 + n_1) \end{array}$$

- (a) Calculer $[s(s(a))]^{\mathbf{M}}$.
- (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $[s^n(a)]^{\mathbf{M}} = (u_n, u_{n+1})$ où u_n est le n -ième nombre de Fibonacci défini par :

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n \geq 2)$$

5. On définit une structure \mathbf{M} dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels comme suit :

$$a^{\mathbf{M}} = (1, 1) \quad \begin{array}{l} s^{\mathbf{M}} : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ s^{\mathbf{M}}((n_1, n_2)) = (n_1 + 1, n_1 \times n_2) \end{array}$$

- (a) Calculer $[s^3(a)]^{\mathbf{M}}$.
- (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $[s^n(a)]^{\mathbf{M}} = (n + 1, n!)$.

Exercice 3.3 (★) Entiers naturels et termes

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_0 = \{Z\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{S\}$.

1. Soit \oplus une fonction sur les paires de termes définie par :

$$\oplus : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \times \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \quad \oplus(t_1, t_2) = \begin{cases} t_2 & \text{si } t_1 = Z \\ S(\oplus(t, t_2)) & \text{si } t_1 = S(t) \end{cases}$$

Calculer $\oplus(S(S(Z)), S(Z))$.

2. Soit \mathbf{M} une structure dont le domaine est l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels et telle que $Z^{\mathbf{M}} = 0$ et $S^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction définie par $S^{\mathbf{M}}(n) = n + 1$.
 - (a) Calculer $[\oplus(S(S(Z)), S(Z))]^{\mathbf{M}}$.
 - (b) Montrer par induction sur t_1 , que pour tous termes t_1 et t_2 , $[\oplus(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}} = [t_1]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}}$.

Exercice 3.4 (Arbres binaires et termes)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{k\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{f\}$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

2. Si $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, à quoi correspond $[t]^{\mathbf{M}}$ lorsque :
 - (a) \mathbf{M} est la structure de domaine \mathbb{N} telle que $k^{\mathbf{M}} = 1$ et $f^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction définie par $f^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) = n_1 + n_2$?
 - (b) \mathbf{M} est la structure de domaine \mathbb{N} telle que $k^{\mathbf{M}} = 0$ et $f^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction définie par $f^{\mathbf{M}}(n_1, n_2) = 1 + \max(n_1, n_2)$?
3. Définir une structure \mathbf{M} telle que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, $[t]^{\mathbf{M}} = \tau(t)$ où $\tau(t)$ désigne la taille d'un terme définie inductivement par :

$$\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = k \\ 1 + \tau(t_1) + \tau(t_2) & \text{si } t = f(t_1, t_2) \end{cases}$$

Exercice 3.5 ((*) Relations et termes)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$ et \mathcal{F}_0 contient une infinité de symboles de constante numérotés par des entiers :

$$\mathcal{F}_0 = \{k_0, k_1, k_2, \dots\} = \bigcup_{i \geq 0} \{k_i\}$$

Etant donné un entier naturel n , on note $\odot^n(k_i)$ le terme :

$$\odot^n(k_i) = \begin{cases} k_i & \text{si } n = 0 \\ \odot(\odot^m(k_i)) & \text{si } n = m + 1 \end{cases}$$

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
2. Soit \mathbf{M}_1 la structure dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels définie par :

$$\begin{aligned} k_i^{\mathbf{M}_1} &= (i, 0) & \odot^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \text{pour tout } k_i \in \mathcal{F}_0 & & \odot^{\mathbf{M}_1}((n_1, n_2)) &= (n_1, n_1 + n_2) \end{aligned}$$

- (a) Calculer $[\odot(\odot(\odot(k_5)))]^{\mathbf{M}_1}$.
- (b) Montrer par induction que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe deux entiers naturels i et n tels que $[t]^{\mathbf{M}_1} = (i, i \times n)$.
- (c) Montrer par récurrence que pour tous entiers naturels n et i il existe un terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ tel que $[t]^{\mathbf{M}_1} = (i, i \times n)$.
- (d) En déduire que $\{[t]^{\mathbf{M}_1} \mid t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})\} = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_2 \text{ est un multiple de } n_1\}$
3. Soit \mathbf{M}_2 la structure dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels définie par :

$$\begin{aligned} k_i^{\mathbf{M}_2} &= (i, i) & \odot^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \text{pour tout } k_i \in \mathcal{F}_0 & & \odot^{\mathbf{M}_2}((n_1, n_2)) &= (n_1, n_2 + 1) \end{aligned}$$

- (a) Calculer $[\odot^5(k_3)]^{\mathbf{M}_2}$.
- (b) Montrer (par récurrence sur n) que $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_2} = (m, m + n)$.
- (c) Soient n_1, n_2, n et m des entiers naturels tels que $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_2} = (n_1, n_2)$. Exprimer n et m en fonction de n_1 et n_2 . En déduire que si $n_1 \leq n_2$, alors il existe un terme t tel que $[t]^{\mathbf{M}_2} = (n_1, n_2)$.
- (d) Montrer par induction sur t , que si $[t]^{\mathbf{M}_2} = (n_1, n_2)$ alors $n_1 \leq n_2$.

- (e) En déduire que $\{[t]^{\mathbf{M}_2} \mid t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})\} = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_1 \leq n_2\}$.
4. Soit \mathbf{M}_3 la structure dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels définie par :
- $$\begin{aligned} k_i^{\mathbf{M}_3} &= (0, i) & \odot^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \text{pour tout } k_i \in \mathcal{F}_0 & & \odot^{\mathbf{M}_3}((n_1, n_2)) &= (n_1 + 1, n_2 + 1) \end{aligned}$$
- (a) Calculer $[\odot^3(k_5)]^{\mathbf{M}_3}$.
- (b) Montrer (par récurrence sur n) que $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_3} = (n, m + n)$.
- (c) Soient n_1, n_2, n et m des entiers naturels tels que $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_3} = (n_1, n_2)$. Exprimer n et m en fonction de n_1 et n_2 . En déduire que $[\odot^n(k_m)]^{\mathbf{M}_3} = [\odot^m(k_n)]^{\mathbf{M}_2}$.
- (d) En déduire que $\{[t]^{\mathbf{M}_3} \mid t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})\} = \{[t]^{\mathbf{M}_2} \mid t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})\}$.

Exercice 3.6 (Evaluation d'expressions booléennes)

Soit $x \cdot \bar{y} + (\bar{y} + x)$ une expression booléenne. En utilisant la définition des opérateurs booléens calculer le résultat de l'évaluation de cette expression, puis le vérifier à l'aide d'un raisonnement équationnel lorsque :

1. $x = y = 1$
2. $x = 0$ et $y = 1$

Exercice 3.7 (Raisonnement équationnel)

A l'aide d'un raisonnement équationnel, montrer les équivalences suivantes :

- (1) $\overline{\bar{x} + y} + z \equiv (\bar{x} + z) \cdot (\bar{y} + z)$
- (2) $(\bar{x} + y) \cdot \overline{\bar{y} + \bar{x}} \equiv 0$
- (3) $\overline{x \cdot \bar{y}} + \bar{x} + \bar{y} \equiv 1$
- (4) $(x + \bar{y}) \cdot \bar{y} + x \equiv 1$
- (5) $\overline{x + y} + (x \cdot y) \equiv (\bar{x} + y) \cdot (\bar{y} + x)$

Exercice 3.8 (Raisonnement équationnel, structures et interprétations)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{a_1, a_2, s, o\}$ un ensemble de symboles de fonction contenant uniquement quatre constantes. Dans cet exercice, on considère uniquement des structures dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $|\mathbf{M}| = \{\text{rouge}, \text{vert}\}$. On note \mathbf{E} l'ensemble de ces structures. Chaque structure \mathbf{M} de \mathbf{E} associe donc une couleur (soit vert, soit rouge) aux constantes de \mathcal{F}_0 . Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \{\text{est_rouge}\}$ l'ensemble contenant uniquement un prédicat unaire. On suppose que pour les structures \mathbf{M} de \mathbf{E} , l'interprétation de ce symbole de prédicat est :

$$\text{est_rouge}^{\mathbf{M}} = \{\text{rouge}\}$$

Etant données une constante $k \in \mathcal{F}_0$ et une structure $\mathbf{M} \in \mathbf{E}$, on note $x_k^{\mathbf{M}}$ la valeur booléenne de $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(\text{est_rouge}(k))$ et on a donc :

$$\begin{aligned} [\text{est_rouge}(k)]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(\text{est_rouge}(k)) = x_k^{\mathbf{M}} &= 1 \quad \text{si et seulement si} \quad k^{\mathbf{M}} = \text{rouge} \\ [\text{est_rouge}(k)]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(\text{est_rouge}(k)) = x_k^{\mathbf{M}} &= 0 \quad \text{si et seulement si} \quad k^{\mathbf{M}} = \text{vert} \end{aligned}$$

1. Soit k_1 et k_2 deux constantes de \mathcal{F}_0 .
 - (a) Proposer une formule $F_{k_1, k_2} \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ permettant d'exprimer que k_1 et k_2 ont la même couleur.
 - (b) Calculer l'expression booléenne $f(x_{k_1}^{\mathbf{M}}, x_{k_2}^{\mathbf{M}}) = [F_{k_1, k_2}]^{\mathbf{M}}$.

(c) Etant donnés $k_1, k_2, k_3 \in \mathcal{F}_0$, montrer que :

$$f(x_{k_1}^{\mathbf{M}}, x_{k_2}^{\mathbf{M}}) \cdot f(x_{k_1}^{\mathbf{M}}, x_{k_3}^{\mathbf{M}}) \equiv (x_{k_1}^{\mathbf{M}} \cdot x_{k_2}^{\mathbf{M}} \cdot x_{k_3}^{\mathbf{M}}) + (\overline{x_{k_1}^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{k_2}^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{k_3}^{\mathbf{M}}})$$

2. On souhaite que :

- si s est vert, alors a_1 et o ont la même couleur
- si s est rouge, alors a_2 et o ont la même couleur

(a) Proposer deux formules F_1 et F_2 de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ exprimant ces deux propriétés.

(b) Calculer l'expression booléenne $[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $x_s^{\mathbf{M}}$, $f(x_o^{\mathbf{M}}, x_{a_1}^{\mathbf{M}})$ et $f(x_o^{\mathbf{M}}, x_{a_2}^{\mathbf{M}})$.

(c) Montrer que :

$$[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}} \equiv x_o^{\mathbf{M}} \cdot (x_s^{\mathbf{M}} \cdot x_{a_2}^{\mathbf{M}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot x_{a_1}^{\mathbf{M}} + x_{a_1}^{\mathbf{M}} \cdot x_{a_2}^{\mathbf{M}}) + \overline{x_o^{\mathbf{M}}} \cdot (x_s^{\mathbf{M}} \cdot \overline{x_{a_2}^{\mathbf{M}}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{a_1}^{\mathbf{M}}} + \overline{x_{a_1}^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{a_2}^{\mathbf{M}}})$$

(d) Montrer que pour tous booléens x, y et z , $x \cdot z + \overline{x} \cdot y + y \cdot z \equiv x \cdot z + \overline{x} \cdot y$. En déduire que :

$$[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}} \equiv x_o^{\mathbf{M}} \cdot (x_s^{\mathbf{M}} \cdot x_{a_2}^{\mathbf{M}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot x_{a_1}^{\mathbf{M}}) + \overline{x_o^{\mathbf{M}}} \cdot (x_s^{\mathbf{M}} \cdot \overline{x_{a_2}^{\mathbf{M}}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot \overline{x_{a_1}^{\mathbf{M}}})$$

(e) Montrer que pour tous booléens x, y et z , $x \cdot y + \overline{x} \cdot z \equiv \overline{x \cdot y} + \overline{x} \cdot \overline{z}$. En déduire que si l'on suppose que $[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, alors $x_o^{\mathbf{M}} \equiv x_s^{\mathbf{M}} \cdot x_{a_2}^{\mathbf{M}} + \overline{x_s^{\mathbf{M}}} \cdot x_{a_1}^{\mathbf{M}}$.

Exercice 3.9 (Structures et interprétations)

A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{c, d\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, q\}$ on définit la formule :

$$F = (p(c, d) \Rightarrow q(c, d)) \Rightarrow (\neg p(c, d) \Rightarrow \neg q(c, d))$$

1. Soit \mathbf{M} une structure, calculer $[F]^{\mathbf{M}}$.
2. Définir une structure \mathbf{M}_1 telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$.
3. Définir une structure \mathbf{M}_2 telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$.

Exercice 3.10 (Structures et interprétations)

A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, eq\}$ où eq désigne le prédicat d'égalité, on définit la formule $F = p(a, b) \Rightarrow eq(a, b)$.

1. Existe-t-il une structure \mathbf{M} dont le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ est un singleton et telle que $[F]^{\mathbf{M}} = 0$? Pourquoi?
2. On considère des structures \mathbf{M} dont le domaine d'interprétation contient uniquement deux éléments distincts ($|\mathbf{M}| = \{k_1, k_2\}$).
 - (a) Combien d'interprétations sont possibles pour le prédicat p ?
 - (b) Combien d'interprétations des symboles de constante a et b sont telles que $[eq(a, b)]^{\mathbf{M}} = 1$?
3. Définir une structure \mathbf{M}_1 telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 0$ et une structure \mathbf{M}_2 telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 1$.

Exercice 3.11 ((*) Structures et interprétations)

1. A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ où $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\oplus\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$, on définit la formule $F = p(\odot(a), \oplus(a, b)) \Rightarrow p(\oplus(a, b), \odot(a))$.
 - (a) Définir une structure \mathbf{M}_1 telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$.
 - (b) Définir une structure \mathbf{M}_2 telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$.

2. A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ où $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{r, s\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$, on définit la formule $F = p(b, s(a, r(b, a))) \wedge p(s(b, b), a)$.
 - (a) Définir une structure \mathbf{M}_1 telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$.
 - (b) Définir une structure \mathbf{M}_2 telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$.
3. A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ où $\mathcal{F}_0 = \{k_1, k_2\}$, $\mathcal{F}_1 = \{f\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{g\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$, on définit la formule $F = p(f(k_1), k_1) \vee p(g(k_1, f(k_1)), k_2)$.
 - (a) Définir une structure \mathbf{M}_1 telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$.
 - (b) Définir une structure \mathbf{M}_2 telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$.
4. A partir des ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ où $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\otimes\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$, on définit la formule $F = p(\odot(a), \odot(b)) \Rightarrow (p(\otimes(a, b), a) \vee p(\otimes(a, b), b))$.
 - (a) Définir une structure \mathbf{M}_1 telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$.
 - (b) Définir une structure \mathbf{M}_2 telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$.

Exercice 3.12 ((*) Structures et interprétations)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{k_i\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \odot\}$, et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, q\}$ un ensemble de symboles de prédicat.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble \mathcal{F} .
2. Donner une définition inductive du nombre d'occurrences $nb_{op}(t)$ de symboles de \mathcal{F}_2 , et du nombre d'occurrences $nb_k(t)$ de symboles de constante de \mathcal{F}_0 , dans un terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
3. Montrer par induction sur $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ que $nb_{op}(t) = nb_k(t) - 1$.
4. Soit \mathbf{M}_1 la structure dont le domaine $|\mathbf{M}_1| = \wp_f(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties finies de \mathbb{N} (chaque élément E de $|\mathbf{M}_1|$ est donc un ensemble fini d'entiers) telle que :

$$\begin{aligned}
 k_i^{\mathbf{M}_1} &= \{0, 1, \dots, i\} & \oplus^{\mathbf{M}_1} : \wp_f(\mathbb{N}) \times \wp_f(\mathbb{N}) &\rightarrow \wp_f(\mathbb{N}) \\
 &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq i\} & \oplus^{\mathbf{M}_1}(E_i, E_j) &= E_i \cup E_j \\
 \ominus^{\mathbf{M}_1} : \wp_f(\mathbb{N}) \times \wp_f(\mathbb{N}) &\rightarrow \wp_f(\mathbb{N}) & \odot^{\mathbf{M}_1} : \wp_f(\mathbb{N}) \times \wp_f(\mathbb{N}) &\rightarrow \wp_f(\mathbb{N}) \\
 \ominus^{\mathbf{M}_1}(E_i, E_j) &= E_i \setminus E_j & \odot^{\mathbf{M}_1}(E_i, E_j) &= E_i \cap E_j
 \end{aligned}$$

- (a) Calculer $[\oplus(k_i, k_j)]^{\mathbf{M}_1}$ lorsque $i \leq j$.
- (b) Calculer $[\ominus(k_i, k_j)]^{\mathbf{M}_1}$ lorsque $i \geq j$.
- (c) Calculer $[\odot(k_i, k_j)]^{\mathbf{M}_1}$ lorsque $i \leq j$.
- (d) Donner un terme t tel que $[t]^{\mathbf{M}_1} = \{2, 3, 7\}$.
5. Etant donnés deux termes $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, on définit la formule :

$$F_{t_1, t_2} = (p(t_1, t_2) \Rightarrow q(\odot(t_1, t_2), t_1)) \wedge (q(\odot(t_1, t_2), t_1) \Rightarrow p(t_1, t_2))$$

- (a) Montrer que $[F_{t_1, t_2}]^{\mathbf{M}} = 1$ lorsque \mathbf{M} est une structure telle que :

$$p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) \in |\mathbf{M}| \times |\mathbf{M}| \mid (\odot^{\mathbf{M}}(m_1, m_2), m_1) \in q^{\mathbf{M}}\}$$

- (b) On complète la structure \mathbf{M}_1 de la question 4 en interprétant le symbole q par la relation d'égalité sur les ensembles :

$$q^{\mathbf{M}_1} = \{(E_1, E_2) \mid E_1 = E_2\}$$

Si la structure \mathbf{M}_1 vérifie la propriété de la question précédente, quelle est la relation sur les ensembles définie par $p^{\mathbf{M}_1}$?

Exercice 3.13 (Formules équivalentes)

On considère les formules atomiques $A, B, C \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ à partir desquelles sont définies les formules $F_1 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ et $F_2 = (\neg A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$.

1. Etant donnée une structure \mathbf{M} , calculer les expressions booléennes $[F_1]^\mathbf{M}$ et $[F_2]^\mathbf{M}$ en fonction de $\mathbf{I}_\mathbf{M}(A)$, $\mathbf{I}_\mathbf{M}(B)$ et $\mathbf{I}_\mathbf{M}(C)$ (sans effectuer de simplifications).
2. A l'aide d'un raisonnement équationnel, en indiquant le nom de l'équivalence utilisée à chaque étape, transformer ces expressions pour montrer que $F_1 \models F_2$.

Exercice 3.14 (Formules équivalentes)

On considère les formules atomiques $A, B \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ à partir desquelles sont définies les formules $F_1 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow A$ et $F_2 = A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

1. Construire et simplifier (par un raisonnement équationnel) les expressions booléennes $[F_1]^\mathbf{M}$ et $[F_2]^\mathbf{M}$.
2. A-t-on $F_1 \models F_2$? (justifier)

Exercice 3.15 (Formules valides)

On considère les formules atomiques $A, B \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ à partir desquelles sont définies les formules $F_1 = (A \Rightarrow \neg A) \vee (\neg A \Rightarrow A)$ et $F_2 = (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$.

1. Etant donnée une structure \mathbf{M} , calculer les expressions booléennes $[F_1]^\mathbf{M}$ et $[F_2]^\mathbf{M}$ en fonction de $\mathbf{I}_\mathbf{M}(A)$ et $\mathbf{I}_\mathbf{M}(B)$ (sans effectuer de simplifications).
2. A l'aide d'un raisonnement équationnel, en indiquant le nom de l'équivalence utilisée à chaque étape, montrer que les formules F_1 et F_2 sont valides.

Exercice 3.16 (Formules valides, formules satisfiables)

Soit $A, B \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ deux formules atomiques. Les formules suivantes sont-elles satisfiables ? sont-elles valides ?

$$\begin{array}{ll}
 F_1 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) & F_2 = ((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B \\
 F_3 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) & F_4 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B) \\
 F_5 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow A & F_6 = A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \\
 F_7 = (A \wedge \neg A) \Rightarrow B & F_8 = (\neg A \vee B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \\
 F_9 = (A \vee \neg A) \Rightarrow B & F_{10} = (\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \\
 F_{11} = (\neg A \vee B) \wedge \neg(\neg B \Rightarrow \neg A) & F_{12} = (A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)
 \end{array}$$

Exercice 3.17 ((*) Conséquence sémantique)

1. Soit F une formule non satisfiable et G une formule ni valide, ni non satisfiable.
 - (a) A-t-on $F \models G$? (Justifier)
 - (b) A-t-on $G \models F$? (Justifier)
 - (c) A-t-on $\neg F \models G$? (Justifier)
 - (d) A-t-on $G \models \neg F$? (Justifier)
2. Mêmes questions si F une formule valide et G une formule ni valide, ni non satisfiable.

Exercice 3.18 (Conséquence sémantique)

Soit $A, B, C \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ trois formules atomiques. Les conséquences sémantiques suivantes sont-elles vérifiées ?

$$\begin{array}{ll}
 (1) : \{A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C\} \models C & (2) : A \Rightarrow B \models \neg B \Rightarrow \neg A \\
 (3) : \{A \vee B, \neg A\} \models B & (4) : A \Rightarrow B \models B \Rightarrow A \\
 (5) : \{\neg(A \vee B), C \Rightarrow B\} \models \neg(A \vee C) & (6) : A \Rightarrow B \models \neg A \Rightarrow \neg B \\
 (7) : \{A \Rightarrow B, \neg B\} \models \neg A & (8) : \{A \Rightarrow B, \neg A\} \models \neg B \\
 (9) : \{\neg B \Rightarrow \neg A, A\} \models B & (10) : \{\neg A \Rightarrow \neg B, A\} \models B
 \end{array}$$

Exercice 3.19 ((*) Formules valides, conséquence sémantique)

Soit F la formule $((A \vee \neg B) \wedge B) \Rightarrow A$.

1. Etant donnée une structure \mathbf{M} , calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$ (sans effectuer de simplification).
2. En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que F est une formule valide (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
3. A-t-on $(A \vee \neg B) \wedge B \models A$? (justifier)
4. Soit F_1 une formule quelconque. A-t-on $\neg F \models F_1$? (justifier)
5. Soit F_2 une formule telle que $F \models F_2$. La formule F_2 est-elle satisfiable? valide? (justifier)

Exercice 3.20 ((*) Formules équivalentes)

Soit $F_1 = (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ et $F_2 = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$ deux formules.

1. Etant donnée une structure \mathbf{M} , calculer les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$ (sans effectuer de simplification).
2. En utilisant un raisonnement équationnel, simplifier les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
3. En déduire que $F_1 \models F_2 \models B \Rightarrow A$.

Exercice 3.21 ((*) Formules valides, formules satisfiables, formules équivalentes)

1. Soit F_1 et F_2 deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$.
 - (a) Montrer que si F_1 est valide alors $F_1 \wedge F_2 \models F_2$.
 - (b) Montrer que si F_1 est insatisfiable alors $F_1 \vee F_2 \models F_2$.
2. Soit $F = (A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$ et $F' = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, où A et B sont deux formules atomiques.
 - (a) Etant donnée une structure \mathbf{M} , calculer les expressions booléennes $[F]^{\mathbf{M}}$ et $[F']^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$ (sans effectuer de simplification).
 - (b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que les expressions booléennes $[F]^{\mathbf{M}}$ et $[F']^{\mathbf{M}}$ sont équivalentes à l'expression booléenne :

$$(\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)) \cdot (\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A))$$

- (c) Peut-on en déduire que $F \models (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$? Justifier.
- (d) En déduire que F est une formule valide si et seulement si $A \models B$ (justifier avec une démonstration).

Exercice 3.22 ((*) Formules valides, formules satisfiables, formules équivalentes)

Soit les formules $F_1 = (\neg A \vee A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ et $F_2 = (B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \vee A)$.

1. Etant donnée une structure \mathbf{M} , calculer les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$ (sans effectuer de simplification).
2. En utilisant un raisonnement équationnel, simplifier les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
3. Les formules F_1 et F_2 sont-elles satisfiables? valides? (justifier)

4. Soit la formule $F_3 = (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \vee A)$, que pouvez-vous dire de $[F_3]^{\mathbf{M}}$? (justifier)
5. A-t-on $\neg F_2 \models F_1$? (justifier)

Exercice 3.23 (Formules insatisfiables)

Soit F la formule $(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)$.

1. Etant donnée une structure \mathbf{M} , calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$ (sans effectuer de simplification).
2. En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que la formule F est insatisfiable (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
3. Soit F' une formule quelconque, a-t-on $F \models F'$?

Exercice 3.24 (Conséquence sémantique)

Retrouver les conclusions obtenues dans les exercices 2.3, 2.4 et 2.5 en utilisant la notion de conséquence sémantique.



TD4 : Règles de déduction sur les quantificateurs

Les exercices annotés par le symbole \star correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 4.1 En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver les formules suivantes.

1. Quantificateur universel

$$\begin{aligned} (G_1) \quad & (\forall x (p(x) \wedge q(x))) \Rightarrow (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)) \\ (G_2) \quad & (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge q(x)) \\ (\star) \quad (G_3) \quad & (\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \vee q(x)) \end{aligned}$$

2. Quantificateur existentiel

$$\begin{aligned} (\star) \quad (G_4) \quad & (\exists x (p(x) \wedge q(x))) \Rightarrow (\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)) \\ (G_5) \quad & (\exists x (p(x) \vee q(x))) \Rightarrow (\exists x p(x) \vee \exists x q(x)) \\ (G_6) \quad & (\exists x p(x) \vee \exists x q(x)) \Rightarrow \exists x (p(x) \vee q(x)) \end{aligned}$$

3. Ordre sur les quantificateurs

$$\begin{aligned} (G_7) \quad & (\exists x \exists y r(x, y)) \Rightarrow (\exists y \exists x r(x, y)) \\ (G_8) \quad & (\exists x \forall y r(x, y)) \Rightarrow (\forall y \exists x r(x, y)) \end{aligned}$$

4. Quantification et implication

$$\begin{aligned} (G_9) \quad & ((\forall x (p(x) \Rightarrow q(x))) \wedge (\exists x p(x))) \Rightarrow \exists x q(x) \\ (G_{10}) \quad & (\forall x (p(x) \Rightarrow \neg q(x))) \Rightarrow \neg \exists x (p(x) \wedge q(x)) \end{aligned}$$

5. Equivalences entre quantificateurs

$$\begin{aligned} (\star) \quad (G_{11}) \quad & (\forall x \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \exists x p(x)) & (\star) \quad (G_{12}) \quad & (\neg \exists x p(x)) \Rightarrow (\forall x \neg p(x)) \\ (G_{13}) \quad & (\exists x \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \forall x p(x)) & (G_{14}) \quad & (\neg \forall x p(x)) \Rightarrow (\exists x \neg p(x)) \end{aligned}$$

6. « tiers exclu » sur les quantificateurs

$$(G_{15}) \quad (\forall x p(x)) \vee (\exists x \neg p(x))$$

Exercice 4.2 (\star)

En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver la formule $(F_1 \wedge F_2) \Rightarrow F_3$ lorsque :

1. $F_1 = \forall x (p(x) \Rightarrow q(x))$, $F_2 = \exists x (q(x) \Rightarrow r(x))$, et $F_3 = \exists x (p(x) \Rightarrow r(x))$
2. $F_1 = \exists x (p(x) \Rightarrow q(x))$, $F_2 = \forall x (q(x) \Rightarrow r(x))$ et $F_3 = \exists x (p(x) \Rightarrow r(x))$

Exercice 4.3 (\star)

En utilisant les règles de la déduction naturelle, prouver les formules :

$$\begin{aligned} (F_1) \quad & \forall x ((\exists y \forall z p(x, y, z)) \Rightarrow \exists z p(x, z, z)) \\ (F_2) \quad & \exists x \forall y \neg p(x, y) \Rightarrow \neg \forall x \exists y p(x, y) \\ (F_3) \quad & \forall x (p(x, f(x)) \vee \exists y p(x, f(y))) \Rightarrow \forall x \exists y p(x, y) \end{aligned}$$

Exercice 4.4 En utilisant les règles de la déduction naturelle prouver les formules suivantes (dans toutes ces formules, a est un symbole de constante).

$$\begin{array}{ll}
(G_1) & ((\forall x p(x)) \wedge q(a)) \Leftrightarrow \forall x (p(x) \wedge q(a)) \\
(G_2) & ((\forall x p(x)) \vee q(a)) \Leftrightarrow \forall x (p(x) \vee q(a)) \\
(G_3) & ((\exists x p(x)) \wedge q(a)) \Leftrightarrow \exists x (p(x) \wedge q(a)) \\
(G_4) & ((\exists x p(x)) \vee q(a)) \Leftrightarrow \exists x (p(x) \vee q(a)) \\
(G_5) & ((\forall x p(x)) \Rightarrow q(a)) \Leftrightarrow \exists x (p(x) \Rightarrow q(a)) \\
(G_6) & ((\exists x p(x)) \Rightarrow q(a)) \Leftrightarrow \forall x (p(x) \Rightarrow q(a)) \\
(G_7) & (q(a) \Rightarrow (\forall x p(x))) \Leftrightarrow \forall x (q(a) \Rightarrow p(x)) \\
(G_8) & (q(a) \Rightarrow (\exists x p(x))) \Leftrightarrow \exists x (q(a) \Rightarrow p(x))
\end{array}$$

Exercice 4.5 ((*) Involutions et bijections)

On considère un langage logique avec variables muni du symbole de fonction unaire $f \in \mathcal{F}_1$ et du symbole de prédicat binaire $\text{eq} \in \mathcal{P}_2$ d'égalité. Formellement ce prédicat désigne une relation d'équivalence qui est une congruence pour f , c-à-d vérifie les quatre formules suivantes :

$$\begin{array}{ll}
(F_1) & \forall x \text{eq}(x, x) \quad (\text{réflexivité}) \\
(F_2) & \forall x \forall y (\text{eq}(x, y) \Rightarrow \text{eq}(y, x)) \quad (\text{symétrie}) \\
(F_3) & \forall x \forall y \forall z ((\text{eq}(x, y) \wedge \text{eq}(y, z)) \Rightarrow \text{eq}(x, z)) \quad (\text{transitivité}) \\
(F_4) & \forall x \forall y (\text{eq}(x, y) \Rightarrow \text{eq}(f(x), f(y))) \quad (\text{congruence})
\end{array}$$

On considère les formules F_5 , F_6 et F_7 qui expriment respectivement que la fonction f est involutive, injective et surjective :

$$\begin{array}{ll}
(F_5) & \forall x \text{eq}(x, f(f(x))) \quad (\text{involution}) \\
(F_6) & \forall x_1 \forall x_2 (\text{eq}(f(x_1), f(x_2)) \Rightarrow \text{eq}(x_1, x_2)) \quad (\text{injection}) \\
(F_7) & \forall y \exists x \text{eq}(y, f(x)) \quad (\text{surjection})
\end{array}$$

1. En utilisant les règles de la déduction naturelle, montrer que toute fonction involutive est injective, c-à-d que la formule F_6 est prouvable à partir des hypothèses F_1 , F_2 , F_3 , F_4 et F_5 . Afin d'alléger la preuve, on pourra utiliser les trois règles dérivées suivantes qui permettent d'éliminer deux ou trois quantificateurs universels (simultanément) en tête d'une formule à partir d'une hypothèse pour prouver une formule.

$ \begin{array}{l} \langle i \rangle \quad \text{supposons } h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, \\ \quad h : \forall x \forall y A \\ \quad \text{montrons } A[x := t_1][y := t_2] \\ \langle i \rangle \quad \text{CQFD } (D_{\forall}^2 \text{ avec } h) \end{array} $	$ \begin{array}{l} \langle i \rangle \quad \text{supposons } h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, \\ \quad h : \forall x \forall y \forall z A \\ \quad \text{montrons} \\ \quad \quad A[x := t_1][y := t_2][z := t_3] \\ \langle i \rangle \quad \text{CQFD } (D_{\forall}^3 \text{ avec } h) \end{array} $
--	--

Indication. Il s'agit de formaliser le raisonnement suivant : si $f(x_1) = f(x_2)$, alors en appliquant f des deux côtés de l'égalité on obtient $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ et puisque f est involutive on a $f(f(x_1)) = x_1$ et $f(f(x_2)) = x_2$ et donc $x_1 = x_2$.

2. En utilisant les règles de la déduction naturelle, montrer que toute fonction involutive est surjective, c-à-d que la formule F_7 est prouvable à partir des hypothèses F_1 , F_2 , F_3 , F_4 et F_5 .

Indication. Il s'agit de formaliser le raisonnement suivant : étant donné y , $x = f(y)$ vérifie $y = f(x)$ car $f(f(y)) = y$ puisque f est involutive.

Exercice 4.6 ((*) Logique équationnelle)

On considère un langage logique comprenant le symbole de prédicat d'égalité d'arité 2 noté eq et on ajoute aux règles de la déduction naturelle les deux règles suivantes permettant de raisonner sur des formules contenant ce prédicat.

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $eq(t, t)$ $\langle i \rangle$ CQFD (I_{eq})	$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $F[x := t]$ <table> <tr> <td>$\langle i + 1 \rangle$ montrons $F[x := t']$</td> </tr> <tr> <td>...</td> </tr> <tr> <td>$\langle i + 1 \rangle$ CQFD</td> </tr> </table> <table> <tr> <td>$\langle i + 2 \rangle$ montrons $eq(t, t')$</td> </tr> <tr> <td>...</td> </tr> <tr> <td>$\langle i + 2 \rangle$ CQFD</td> </tr> </table> $\langle i \rangle$ CQFD (E_{eq})	$\langle i + 1 \rangle$ montrons $F[x := t']$...	$\langle i + 1 \rangle$ CQFD	$\langle i + 2 \rangle$ montrons $eq(t, t')$...	$\langle i + 2 \rangle$ CQFD
$\langle i + 1 \rangle$ montrons $F[x := t']$							
...							
$\langle i + 1 \rangle$ CQFD							
$\langle i + 2 \rangle$ montrons $eq(t, t')$							
...							
$\langle i + 2 \rangle$ CQFD							

La règle I_{eq} est un axiome et énonce que la formule $eq(t, t)$ est prouvable pour tout terme t . La règle E_{eq} exprime que si l'on dispose d'une preuve de la formule $F[x := t']$ (c-à-d d'une preuve de la formule F dans laquelle x est substitué par le terme t') et d'une preuve de l'égalité $eq(t, t')$, alors on peut prouver la formule $F[x := t]$ (c-à-d la formule F dans laquelle x est substitué par le terme t). Prouver les deux formules ci-dessous exprimant que l'égalité est symétrique et transitive :

1. $\forall x \forall y (eq(x, y) \Rightarrow eq(y, x))$

Indication : étant données trois variables x' , y' et w et la formule $F = eq(y', w)$, calculer $F[w := y']$ et $F[w := x']$ pour comprendre comment utiliser la règle E_{eq} .

2. $\forall x \forall y \forall z ((eq(x, y) \wedge eq(y, z)) \Rightarrow eq(x, z))$

Indication : étant données trois variables x' , z' et w et la formule $F = eq(w, z')$, calculer $F[w := y']$ et $F[w := x']$ pour comprendre comment utiliser la règle E_{eq} .



TME Edukera sur les échiquiers : Structures

Les exercices sur les échiquiers proposés sur la plateforme Edukera reposent sur un mécanisme permettant de vérifier si des propriétés sur les pièces placées sur un échiquier exprimées par une formule logique sont satisfaites par un échiquier donné. Par exemple, avec l'échiquier de la figure 2, la formule exprimant que tous les pions sont sur la même ligne est "vraie" tandis que la formule exprimant que le fou est de la même couleur que le cavalier est "fausse". Il est ici possible de déplacer les pièces de cet échiquier pour changer le résultat de l'interprétation de ces deux formules.

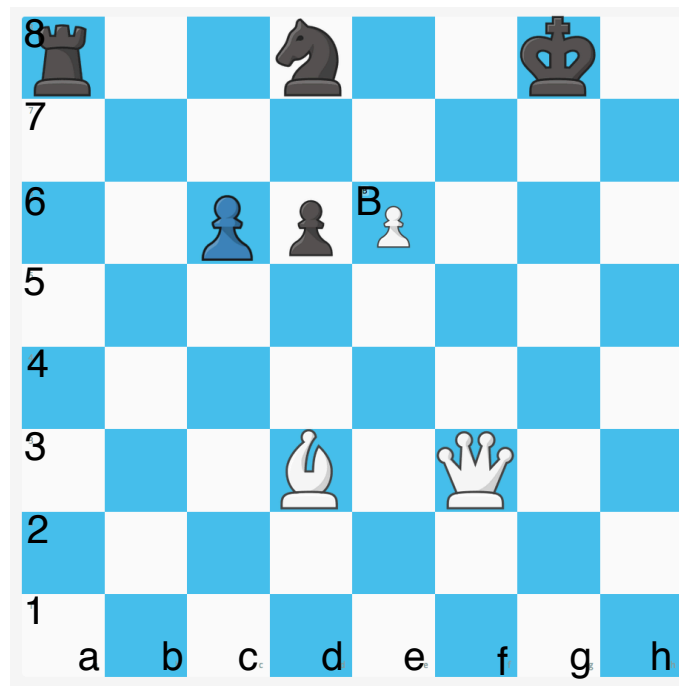


FIGURE 2 – Exemple d'échiquier de la plateforme Edukera

1 Termes

Syntaxe : définition de l'ensemble des termes

L'ensemble $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ des termes considérés contient uniquement des constantes et des variables (la signature utilisée ne contient aucun symbole de fonction d'arité strictement positive) désignant des pièces sur un échiquier. Ces termes sont construits à partir d'un ensemble \mathcal{F}_0 contenant 8 symboles

de constante (les 8 premières lettres de l'alphabet en majuscule) et d'un ensemble X contenant 26 symboles de variable (les lettres de l'alphabet en minuscule).

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \mathcal{F}_0 = \{A, B, C, D, E, F, G, H\} \\ X &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}\end{aligned}$$

Les symboles de constante vont servir à nommer des pièces sur l'échiquier.

Interprétation des termes : construction d'un échiquier

Les termes désignent des pièces positionnées sur un échiquier contenant 8 colonnes (les abscisses de gauche à droite sont désignées par les lettres a, b, c, d, e, f, g et h) et 8 lignes (les ordonnées du bas vers le haut sont désignées par les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8). Par exemple, le pion nommé B sur l'échiquier de la figure 2 se trouve sur la case de coordonnées (e,6).

A chaque pièce placée sur l'échiquier, on associe une position, une espèce, une couleur et une taille (il y a au plus une pièce par case de l'échiquier). L'ensemble Pos des positions possibles contient l'ensemble des coordonnées de l'échiquier :

$$\text{Pos} = \left\{ \begin{array}{cccccccc} (a, 8) & (b, 8) & (c, 8) & (d, 8) & (e, 8) & (f, 8) & (g, 8) & (h, 8) \\ (a, 7) & (b, 7) & (c, 7) & (d, 7) & (e, 7) & (f, 7) & (g, 7) & (h, 7) \\ (a, 6) & (b, 6) & (c, 6) & (d, 6) & (e, 6) & (f, 6) & (g, 6) & (h, 6) \\ (a, 5) & (b, 5) & (c, 5) & (d, 5) & (e, 5) & (f, 5) & (g, 5) & (h, 5) \\ (a, 4) & (b, 4) & (c, 4) & (d, 4) & (e, 4) & (f, 4) & (g, 4) & (h, 4) \\ (a, 3) & (b, 3) & (c, 3) & (d, 3) & (e, 3) & (f, 3) & (g, 3) & (h, 3) \\ (a, 2) & (b, 2) & (c, 2) & (d, 2) & (e, 2) & (f, 2) & (g, 2) & (h, 2) \\ (a, 1) & (b, 1) & (c, 1) & (d, 1) & (e, 1) & (f, 1) & (g, 1) & (h, 1) \end{array} \right\}$$

Chaque pièce appartient à une espèce (les espèces sont présentées sur la figure 3), est d'une certaine taille (grande, moyenne ou petite) et d'une certaine couleur (blanche, noire, bleue). Les ensembles d'espèces, de tailles et de couleurs sont définis par :

$$\begin{aligned}\text{Esp} &= \{e_roi, e_reine, e_tour, e_fou, e_cavalier, e_pion\} \\ \text{Tailles} &= \{t_petit, t_moyen, t_grand\} \\ \text{Couleurs} &= \{c_blanc, c_noir, c_bleu\}\end{aligned}$$

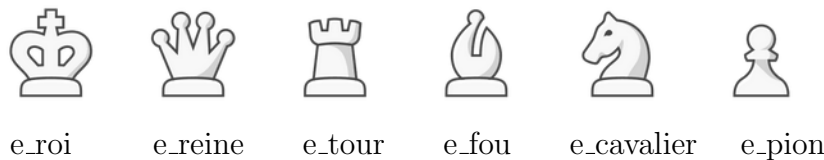


FIGURE 3 – Espèces des pièces de l'échiquier de la plateforme Edukera

Certaines pièces ont un nom : il s'agit d'une constante de \mathcal{F}_0 . Par convention la valeur `None` sert à nommer les pièces anonymes (i.e. sans nom). Deux pièces différentes ne peuvent pas avoir le même nom lorsque ce nom est un élément de \mathcal{F}_0 . Autrement dit tous les symboles de \mathcal{F}_0 ne servent pas nécessairement à nommer une pièce de l'échiquier et un nom de \mathcal{F}_0 ne peut pas servir à nommer deux pièces différentes. Un échiquier E est la donnée d'une grille sur laquelle sont disposées des

pièces et est représenté par un ensemble de quintuplets. Chaque quintuplet $((x, y), e, t, c, n) \in E$ est un élément du produit cartésien :

$$\text{Pos} \times \text{Esp} \times \text{Tailles} \times \text{Couleurs} \times (\mathcal{F}_0 \cup \{\text{None}\})$$

et exprime qu'une pièce de nom n ($n = \text{None}$ si la pièce n'a pas de nom), d'espèce e , de taille t et de couleur c se trouve à la position (x, y) sur l'échiquier E . L'ensemble des échiquiers possibles est donc :

$$\mathbf{E} = \wp(\text{Pos} \times \text{Esp} \times \text{Tailles} \times \text{Couleurs} \times (\mathcal{F}_0 \cup \{\text{None}\}))$$

où lorsque S est un ensemble, $\wp(S)$ désigne l'ensemble des parties de S .

Exercice 1 Donner les éléments de l'ensemble E correspondant à l'échiquier représenté sur la figure 2 (sur cette figure, les pièces qui ne sont pas des pions sont toutes grandes et seul le petit pion blanc a un nom qui est B).

Interprétation des termes : construction d'une structure à partir d'un échiquier

Etant donné un échiquier $E \in \mathbf{E}$, on construit une structure \mathbf{M}_E permettant d'interpréter l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$. La structure \mathbf{M}_E est définie par :

- un domaine d'interprétation correspondant à l'ensemble de tous les quintuplets représentant les pièces positionnées sur l'échiquier E , auquel on ajoute un élément particulier (Error) :

$$|\mathbf{M}_E| = \{((x, y), e, t, c, n) \in E\} \cup \{\text{Error}\}$$

- une fonction d'interprétation qui associe un élément de $|\mathbf{M}_E|$ à chaque symbole de constante de \mathcal{F}_0 désignant une pièce de l'échiquier E : il s'agit du quintuplet correspondant à cette pièce sur l'échiquier (si aucune pièce de nom n se trouve sur l'échiquier, l'interprétation de n déclenche une erreur qui peut être vue comme une valeur particulière Error du domaine d'interprétation) :

$$n^{\mathbf{M}_E} = \begin{cases} ((x, y), e, t, c, n) & \text{si } ((x, y), e, t, c, n) \in E \\ \text{Error} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2 On considère à nouveau l'échiquier représenté sur la figure 2. Quelle est la valeur de $A^{\mathbf{M}_E}$? de $B^{\mathbf{M}_E}$?

2 Formules logiques

Symboles de prédicat

Les formules logiques de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ expriment des propriétés sur les pièces d'un échiquier. Elles sont construites à partir de l'ensemble X de symboles de variable, de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ de symboles de constante et de l'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ de symboles de prédicat où :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \{\text{roi, reine, tour, fou, cavalier, pion, blanc, noir, bleu, petit, moyen, grand}\} \\ \mathcal{P}_2 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{droiteDe, gaucheDe, basDe, hautDe, plusPetit, plusGrand,} \\ \text{idLigne, idColonne, idTaille, idCouleur, =} \end{array} \right\} \\ \mathcal{P}_3 &= \{\text{entre}\} \end{aligned}$$

Interprétation des prédicats : construction d'une structure à partir d'un échiquier (suite)

Etant donné un échiquier E , l'interprétation d'un symbole de prédicat $p \in \mathcal{P}_k$ ($k \in \{1, 2, 3, \}$) est un ensemble de k -uplets de valeurs du domaine d'interprétation, c'est-à-dire un ensemble de k -uplets de quintuplets correspondant aux pièces placées sur l'échiquier. L'interprétation des prédicats d'espèce, de couleur et de taille de \mathcal{P}_1 est définie en examinant les quintuplets de E et en considérant la propriété souhaitée. Par exemple, l'interprétation du prédicat pion avec la structure $|\mathbf{M}_E|$ est définie par :

$$\text{pion}^{\mathbf{M}_E} = \{((x, y), e_pion, t, c, n) \in E\}$$

Si E est l'échiquier représenté sur la figure 2, on a donc :

$$\text{pion}^{\mathbf{M}_E} = \left\{ \begin{array}{l} ((c, 6), e_pion, c_bleu, t_grand, \text{None}), ((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), \\ ((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B) \end{array} \right\}$$

L'interprétation des prédicats de \mathcal{P}_2 et \mathcal{P}_3 est similaire mais nécessite des opérations de comparaison sur les composants des quintuplets de E . Par exemple, l'interprétation du prédicat plusPetit avec la structure $|\mathbf{M}_E|$ est définie par :

$$\text{plusPetit}^{\mathbf{M}_E} = \left\{ \begin{array}{l} (((x_1, y_1), e_1, t_1, c_1, n_1), ((x_2, y_2), e_2, t_2, c_2, n_2)) \in E \times E \\ \mid \left(\begin{array}{l} (t_1 = t_petit \text{ et } (t_2 = t_moyen \text{ ou } t_2 = t_grand)) \\ \text{ou } (t_1 = t_moyen \text{ et } t_2 = t_grand) \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

Si E est l'échiquier représenté sur la figure 2, on a donc :

$$\text{plusPetit}^{\mathbf{M}_E} = \left\{ \begin{array}{l} (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None})), \\ (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((c, 6), e_pion, c_bleu, t_grand, \text{None})), \\ (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((d, 3), e_fou, c_blanc, t_grand, \text{None})), \\ (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((f, 3), e_reine, c_blanc, t_grand, \text{None})), \\ (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((a, 8), e_tour, c_noir, t_grand, \text{None})), \\ (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((d, 8), e_cavalier, c_noir, t_grand, \text{None})), \\ (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((g, 8), e_roi, c_noir, t_grand, \text{None})), \\ (((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), ((c, 6), e_pion, c_bleu, t_grand, \text{None})), \\ (((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), ((d, 3), e_fou, c_blanc, t_grand, \text{None})), \\ (((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), ((f, 3), e_reine, c_blanc, t_grand, \text{None})), \\ (((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), ((a, 8), e_tour, c_noir, t_grand, \text{None})), \\ (((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), ((d, 8), e_cavalier, c_noir, t_grand, \text{None})), \\ (((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), ((g, 8), e_roi, c_noir, t_grand, \text{None})) \end{array} \right\}$$

Exercice 3 Etant donné un échiquier E , définir $p^{\mathbf{M}_E}$ pour tous les symboles de prédicat de \mathcal{P} .

Exercice 4 On considère à nouveau l'échiquier E représenté sur la figure 2. Donner les éléments de l'ensemble $p^{\mathbf{M}_E}$ pour tous les symboles de prédicat de \mathcal{P} .



TD5 : Interprétation des variables et des quantificateurs

Les exercices annotés par le symbole \star correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 5.1 (Interprétation des termes et valuations)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{s\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\otimes\}$ et soit $t = s(\otimes(s(s(a)), \otimes(x, s(y))))$ un terme de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.
2. Dessiner l'arbre représentant le terme t .
3. On considère une structure \mathbf{M} de domaine \mathbb{N} telle que :

$$\begin{aligned} a^{\mathbf{M}} &= 2 & s^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & \otimes^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ b^{\mathbf{M}} &= 3 & s^{\mathbf{M}}(n) &= n + 1 & \otimes^{\mathbf{M}}(n, m) &= n \times m \end{aligned}$$

- (a) Calculer $[t]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}}$ en fonction de $v(x)$ et $v(y)$.
- (b) Soit une valuation v_1 telle que $v_1(x) = 5$ et $v_1(y) = 1$. Calculer $[t]_{v_1}^{\mathbf{M}}$.
- (c) Déterminer une valuation $v_2 : X \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $[t]_{v_2}^{\mathbf{M}} = 33$.
- (d) Calculer $[t]_{v_3}^{\mathbf{M}}$ pour la valuation $v_3 = v_1[x \leftarrow 7]$.

Exercice 5.2 (\star) Interprétation des formules

On considère un plateau carré contenant 36 cases dans lesquelles peuvent être placées des pièces qui sont soit rondes soit carrées. Chaque case est désignée par ses coordonnées (ℓ, c) (désignant respectivement un numéro de ligne et un numéro de colonne) et contient au plus une pièce. Une pièce est représentée par un tuple (p, ℓ, c) où $p \in \{\square, \bigcirc\}$ désigne la forme de la pièce, ℓ le numéro de ligne et c le numéro de colonne où se trouve la pièce. On peut représenter un plateau par l'ensemble des pièces qu'il contient. Voici un exemple de plateau noté P_{ex} (les coordonnées de chaque case figurent en bas des cases).

(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)
\square	\bigcirc				
(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
	\bigcirc				
(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
			\square		
(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
				\bigcirc	
(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)

$$P_{\text{ex}} = \left\{ \begin{array}{l} (\square, 4, 0), \\ (\bigcirc, 4, 1), \\ (\bigcirc, 3, 1), \\ (\square, 2, 3), \\ (\bigcirc, 0, 4) \end{array} \right\}$$

Etant donné un plateau P , on définit une structure \mathbf{M}_P dont le domaine est $|\mathbf{M}_P| = P$. On considère l'ensemble de prédicats $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1 = \{\text{est_rond}, \text{est_carre}\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{\text{est_a_gauche}\}$ et tel que :

- $\text{est_rond}(x)$ signifie que la pièce x située sur le plateau est ronde
- $\text{est_carre}(x)$ signifie que la pièce x située sur le plateau est carrée

- $\text{est_a_gauche}(x, y)$ signifie que la pièce x est dans une case qui se trouve à gauche de la case contenant la pièce y : une case de coordonnées (ℓ, c) est à gauche d'une case de coordonnées (ℓ', c') lorsque $c < c'$
- 1. Définir les ensembles $\text{est_rond}^{\mathbf{M}_P}$, $\text{est_carre}^{\mathbf{M}_P}$ et $\text{est_a_gauche}^{\mathbf{M}_P}$ obtenus à partir d'un plateau P quelconque. Donner les éléments de ces ensembles pour le plateau P_{ex} donné en exemple.
- 2. On considère l'énoncé « *Il existe une pièce ronde située à gauche de toutes les pièces carrées.* ».
- (a) Proposer une formule F permettant d'exprimer cet énoncé.
- (b) Montrer que $[F]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} = 0$ (pour toute valuation \mathbf{v}).
- (c) Proposer un plateau P_{new} tel que $[F]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}_{P_{\text{new}}}} = 1$ (pour toute valuation \mathbf{v}).

Exercice 5.3 (★) Interprétation des termes et des formules

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{0\}$, $\mathcal{F}_1 = \{c\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \otimes\}$ et X un ensemble de symboles de variable. On considère l'ensemble $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ des termes avec variables. Soit t le terme $t = \oplus(x, \otimes(y, c(z)))$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \{0, c, \oplus, \otimes\}$.
2. Dessiner l'arbre représentant le terme t .
3. On définit la structure \mathbf{M} dont le domaine $|\mathbf{M}|$ est l'ensemble des parties $\wp(A)$ de l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Chaque élément $m \in |\mathbf{M}|$ est donc un sous-ensemble de l'ensemble A . Les symboles de \mathcal{F} sont interprétés comme suit.

$$\begin{array}{ll}
 0^{\mathbf{M}} = \emptyset \in |\mathbf{M}| & c^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \rightarrow |\mathbf{M}| \\
 \text{(ensemble vide)} & c^{\mathbf{M}}(E) = \overline{E} = A \setminus E = \{e \in A \mid e \notin E\} \\
 & \text{(complémentaire de } E\text{)} \\
 \\
 \oplus^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \times |\mathbf{M}| \rightarrow |\mathbf{M}| & \otimes^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \times |\mathbf{M}| \rightarrow |\mathbf{M}| \\
 \oplus^{\mathbf{M}}(E_1, E_2) = E_1 \cup E_2 & \otimes^{\mathbf{M}}(E_1, E_2) = E_1 \cap E_2 \\
 \text{(union)} & \text{(intersection)}
 \end{array}$$

Par exemple, on a :

$$\begin{aligned}
 c^{\mathbf{M}}(\{1, 3, 6\}) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 3, 6\} = \{2, 4, 5, 7\} \\
 \oplus^{\mathbf{M}}(\{1, 2, 4, 7\}, \{1, 2, 3, 4\}) &= \{1, 2, 4, 7\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 7\} \\
 \otimes^{\mathbf{M}}(\{1, 2, 4, 7\}, \{1, 2, 3, 4\}) &= \{1, 2, 4, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 4\}
 \end{aligned}$$

On considère la valuation $\mathbf{v}_1 : X \rightarrow |\mathbf{M}|$ telle que $\mathbf{v}_1(x) = \{5, 6, 7\}$, $\mathbf{v}_1(y) = \emptyset$ et $\mathbf{v}_1(z) = \{4\}$. Calculer $[t]_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{M}}$.

4. On considère à présent l'ensemble de symboles de prédicat $\mathcal{P} = \{\text{eq}\}$ contenant un unique élément eq correspondant au prédicat d'arité 2 d'égalité dont l'interprétation est définie par $\text{eq}^{\mathbf{M}} = \{(E_1, E_2) \mid E_1 = E_2\}$.
- (a) Soit F_1 la formule $\exists z \text{eq}(x, \oplus(y, z))$. Quelle propriété sur $\mathbf{v}(x)$ et $\mathbf{v}(y)$ doit être vérifiée pour que $[F_1]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}} = 1$?
- (b) Soit F_2 la formule $\forall x \forall y (F_1 \Rightarrow \text{eq}(\otimes(y, c(x)), 0))$. Calculer $[F_2]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}}$.

\mathbf{M}	$ \mathbf{M} $	$r^{\mathbf{M}}$
\mathbf{M}_1	\mathbb{N} (entiers naturels)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_1 < n_2\}$
\mathbf{M}_2	\mathbb{N} (entiers naturels)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_1 \leq n_2\}$
\mathbf{M}_3	\mathbb{Z} (entiers relatifs)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n_1 < n_2\}$
\mathbf{M}_4	\mathbb{Z} (entiers relatifs)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n_1 \leq n_2\}$
\mathbf{M}_5	\mathbb{Q} (nombres rationnels)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid n_1 < n_2\}$
\mathbf{M}_6	\mathbb{Q} (nombres rationnels)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid n_1 \leq n_2\}$
\mathbf{M}_7	$\wp(\mathbb{N})$ (parties de \mathbb{N})	$\{(E_1, E_2) \in \wp(\mathbb{N}) \times \wp(\mathbb{N}) \mid E_1 \subset E_2\}$
\mathbf{M}_8	$\wp(\mathbb{N})$ (parties de \mathbb{N})	$\{(E_1, E_2) \in \wp(\mathbb{N}) \times \wp(\mathbb{N}) \mid E_1 \subseteq E_2\}$

TABLE 1 – Structures de l'exercice 5.6

Exercice 5.4 (Quantification de formules atomiques)

On considère une structure \mathbf{M} dont le domaine d'interprétation est l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels et dans laquelle l'interprétation du symbole de prédicat $p \in \mathcal{P}_2$ est définie par $p^{\mathbf{M}} = \{(x, y) \mid y = 2x\}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont satisfaites par \mathbf{M} ?

$$\begin{array}{lll}
(F_1) & p(0, 0) & (F_2) & p(1, 1) & (F_3) & \exists x p(1, x) \\
(F_4) & \exists x p(x, 1) & (F_5) & \exists x p(x, 2) & (F_6) & \forall x p(1, x) \\
(F_7) & \forall x p(x, 1) & (F_8) & \exists x \exists y p(x, y) & (F_9) & \exists x \forall y p(x, y) \\
(F_{10}) & \forall x \exists y p(x, y) & (F_{11}) & \forall x \forall y p(x, y)
\end{array}$$

Exercice 5.5 (Domaine d'interprétation)

On considère un langage comprenant l'égalité (prédicat = d'arité 2) ainsi qu'un symbole de prédicat p d'arité 2. Soit les deux formules :

$$(F_1) \forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow \neg(x = y)) \quad (F_2) \forall x \exists y (p(x, y) \wedge \neg(x = y))$$

Pour chacune de ces deux formules, déterminer s'il existe une structure \mathbf{M} qui la satisfait :

- lorsque le domaine d'interprétation de \mathbf{M} est un singleton,
- lorsque le domaine d'interprétation de \mathbf{M} contient uniquement deux éléments,
- lorsque le domaine d'interprétation de \mathbf{M} est l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} et lorsque $p^{\mathbf{M}} = \{(x, y) \mid x \text{ est divisible par } y\}$.

Exercice 5.6 (Interprétation des formules)

Quelles sont parmi les formules closes ci-dessous celles qui sont satisfaites par les structures du tableau 1 ?

$$\begin{array}{lll}
(F_1) & \forall x (\neg r(x, x) \wedge \forall y ((r(x, y) \Rightarrow \neg r(y, x)) \wedge \forall z ((r(x, y) \wedge r(y, z)) \Rightarrow r(x, z))) & \\
(F_2) & \exists x \forall y r(x, y) & (F_3) \forall x \exists y r(x, y) \quad (F_4) \exists x \forall y r(y, x) \\
(F_5) & \forall x \exists y r(y, x) & (F_6) \forall x \forall y (r(x, y) \Rightarrow \exists z (r(x, z) \wedge r(z, y)))
\end{array}$$

Exercice 5.7 ((*) Interprétation des formules)

On considère les deux formules :

$$(F_1) \forall x_1 \forall x_2 (\text{eq}(f(x_1), f(x_2)) \Rightarrow \text{eq}(x_1, x_2)) \quad (F_2) \forall y \exists x \text{eq}(y, f(x))$$

Soit \mathbf{M} une structure telle que $|\mathbf{M}| = \{a\}$ et $\text{eq}^{\mathbf{M}} = \{(a, a)\}$. Montrer que $[F_1]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}} = 1$ et $[F_2]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}} = 1$ où \mathbf{v} est une valuation quelconque.

Exercice 5.8 ((*) Interprétation des formules)

- Soit \mathbf{M} une structure telle que $|\mathbf{M}| = \{a, b, c\}$ et F_1 la formule $\exists x \forall y p(x, y)$.
 - Proposer une interprétation $p^{\mathbf{M}}$ de p telle que $p^{\mathbf{M}}$ contienne exactement 3 éléments (c-à-d 3 paires d'éléments de $|\mathbf{M}|$) et telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$ (quelle que soit la valuation v) et montrer que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$.
 - Proposer une interprétation $p^{\mathbf{M}}$ de p telle que $p^{\mathbf{M}}$ contienne exactement 3 éléments (c-à-d 3 paires d'éléments de $|\mathbf{M}|$) et telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 0$ (quelle que soit la valuation v) et montrer que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 0$.
- Soit F_2 la formule $\exists x ((\forall y p(x, y)) \Rightarrow \exists z p(z, x))$.
 - Le domaine d'interprétation d'une structure peut-il être vide?
 - Montrer que si eq désigne le prédicat d'égalité, c-à-d si $\text{eq}^{\mathbf{M}} = \{(k, k) \mid k \in |\mathbf{M}|\}$, alors $[\exists x \text{eq}(x, x)]_v^{\mathbf{M}} = 1$ (quelle que soit la valuation v).
 - Montrer que la formule F_2 est valide.
- A-t-on $F_2 \models F_1$? $F_1 \models F_2$? Justifier vos réponses.

Exercice 5.9 ((*) Satisfiabilité)

On considère les deux formules $F_1 = \forall x \exists y p(x, y)$ et $F_2 = \exists y \forall x p(x, y)$.

- Définir une structure \mathbf{M}_1 telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_1} = [F_2]_v^{\mathbf{M}_1} = 1$ pour toute valuation v .
- Définir une structure \mathbf{M}_2 telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_2} = [F_2]_v^{\mathbf{M}_2} = 0$ pour toute valuation v .
- Définir une structure \mathbf{M}_3 telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_3} = 1$ et $[F_2]_v^{\mathbf{M}_3} = 0$ pour toute valuation v .
- Existe-t-il une structure \mathbf{M}_4 telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_4} = 0$ et $[F_2]_v^{\mathbf{M}_4} = 1$ pour toute valuation v . Pourquoi?

Exercice 5.10 ((*) Formules satisfiables, formules valides)

Montrer que les formules ci-dessous sont satisfiables mais ne sont pas valides.

- $$\begin{aligned}
 (F_1) \quad & \forall y \exists x (p(x, y) \wedge (\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z))) \\
 (F_2) \quad & \forall x \forall y (q(x, y) \Rightarrow \exists z (q(x, z) \wedge q(z, y))) \\
 (F_3) \quad & (\forall y \exists x p(x, y)) \Rightarrow \exists x p(x, x) \\
 (F_4) \quad & \forall x ((\exists y p(x, y)) \Rightarrow \exists z p(z, x))
 \end{aligned}$$

Exercice 5.11 ((*) Formules satisfiables, formules valides)

Pour chacune des formules ci-dessous, pouvez-vous trouver une structure qui satisfait la formule? qui l'invalidé? La formule est-elle satisfiable? valide?

- $$\begin{aligned}
 (F_1) \quad & (\exists x p(x)) \Rightarrow (\forall x p(x)) \\
 (F_2) \quad & (\forall x p(x)) \Rightarrow (\exists x p(x)) \\
 (F_3) \quad & \forall x (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)) \\
 (F_4) \quad & (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge q(x)) \\
 (F_5) \quad & \exists x (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)) \\
 (F_6) \quad & (\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)) \Rightarrow \exists x (p(x) \wedge q(x)) \\
 (F_7) \quad & \forall x (p(x) \vee q(x)) \Rightarrow (\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \\
 (F_8) \quad & (\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \vee q(x)) \\
 (F_9) \quad & \exists x (p(x) \vee q(x)) \Rightarrow (\exists x p(x) \vee \exists x q(x)) \\
 (F_{10}) \quad & (\exists x p(x) \vee \exists x q(x)) \Rightarrow \exists x (p(x) \vee q(x))
 \end{aligned}$$