



TD1 : Langages logiques

Les exercices annotés par le symbole \star correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 1.1 (Formalisation)

1. (Quantificateurs) Préciser à l'aide d'un quantificateur le sens du mot « un » dans les phrases suivantes et les formaliser dans le langage de la logique des prédicats.
 - (1) *Mark suit un cours.*
 - (2) *Un logicien a été champion du monde de natation.*
 - (3) *Un entier naturel est pair ou impair.*
 - (4) *Un enseignant-chercheur a toujours un nouveau sujet à étudier.*
 - (5) *Un étudiant a besoin d'avoir un idéal.*
2. (Langage naturel) Formaliser les énoncés suivants dans le langage de la logique des prédicats.
 - (1) *Tous les étudiants sont doués de raison.*
 - (2) *Seuls les êtres humains sont doués de raison.*
 - (3) *Aucun éléphant n'est doué de raison.*
 - (4) *Tous les animaux, sauf les chiens, sont gentils avec les logiciens.*
 - (5) *Chacun cherche son éléphant.*
 - (6) *Chaque individu aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde.*
3. (Enoncé mathématique)
 - (a) On considère l'énoncé : « *Tout nombre entier naturel x a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à x .* » Formaliser cet énoncé par une formule logique en utilisant les prédicats suivants :

$\text{entier}(x)$	« x est un entier naturel »
$\text{successeur}(x, y)$	« x est successeur de y »
$\text{inf}(x, y)$	« x est inférieur ou égal à y »
 - (b) On considère le symbole de prédicat p d'arité 2 tel que $p(x_1, x_2)$ signifie « x_1 est un triangle équilatéral de hauteur x_2 ». Formaliser les deux énoncés :
 - (F_1) « *il existe au plus un triangle équilatéral dont la hauteur est z* »
 - (F_2) « *il existe un unique triangle équilatéral dont la hauteur est z* »
 où z est un symbole de variable. On pourra utiliser le prédicat $=$ d'arité 2 pour exprimer l'égalité.

Exercice 1.2 (\star) Variables libres, variables liées, clôture universelle

1. On définit la formule $F = \forall y (p(f(g(x), y)) \wedge \forall x (q(g(z), x) \Rightarrow \exists z p(f(z, w))))$ à partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{w, x, y, z\}$.
 - (a) Quels sont les symboles de fonction apparaissant dans cette formule ?
 - (b) Quels sont les symboles de prédicat apparaissant dans cette formule ?
 - (c) Quels sont les termes apparaissant en argument des symboles de prédicat de F ?
 - (d) Déterminer l'ensemble $\text{Free}(F)$ des variables qui ont au moins une occurrence libre dans F .
 - (e) Quelles sont les variables de $\text{Free}(F)$ qui admettent au moins une occurrence liée dans F ?
 - (f) Déterminer une clôture universelle de la formule F .

2. A partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{x, y, z\}$ et $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ on définit la formule $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ suivante : $(\forall x((p(a, x) \wedge q(y, x)) \Rightarrow \exists x p(x, b))) \vee ((\exists y p(x, y)) \wedge q(x, z))$.
 - (a) Dessiner l'arbre de syntaxe abstraite de la formule F .
 - (b) Donner l'ensemble $\text{Free}(F)$.
 - (c) Indiquer, pour chacune des occurrences de x , si elle est quantifiée universellement, existentiellement, ou pas quantifiée.
 - (d) Déterminer une clôture universelle de la formule F .

Exercice 1.3 ((*) Symboles d'une formule)

Soit la formule $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ où $X = \{x, x_1, x_2, x_3, z\}$ définie par :

$$(\forall x (s_1(s_2(x, x)) \wedge \exists x s_1(s_2(x, z)))) \wedge (s_3(s_4(x)) \wedge (\exists x s_1(s_2(x, z))))$$

1. Quels sont les symboles de fonction apparaissant dans F ? Donner l'arité de ces symboles.
2. Quels sont les symboles de prédicat apparaissant dans F ? Donner l'arité de ces symboles.
3. Déterminer l'ensemble $\text{Free}(F)$.
4. Donner une clôture universelle de F .
5. On souhaite renommer certains symboles de variable pour obtenir une formule logiquement équivalente à F et dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents. On propose la formule suivante :

$$(\forall x_1 (s_1(s_2(\square, \square)) \wedge \exists x_2 s_1(s_2(\square, \square)))) \wedge (s_3(s_4(\square)) \wedge (\exists x_3 s_1(s_2(\square, \square))))$$

Remplacer les \square par les symboles de variable appropriés.

Exercice 1.4 ((*) Symboles d'une formule)

1. On considère les symboles s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 et s_6 appartenant à $X \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ à partir desquels on définit la formule $F = \forall s_1 (s_2(s_3(s_1, s_4(s_5))) \Rightarrow s_6(s_4(s_1), s_5))$.
 - (a) Quelles sont les formules atomiques apparaissant dans F ?
 - (b) Déterminer à quel ensemble chacun des symboles s_1, s_2, s_3, s_4 et s_6 appartient (c-à-d déterminer s'il s'agit d'un symbole de variable de X , d'un symbole de fonction de \mathcal{F} ou d'un symbole de prédicat de \mathcal{P}).
 - (c) Que peut-on dire du symbole s_5 ? A quels ensembles peut-il appartenir?
 - (d) Quels sont les termes apparaissant en argument des symboles de prédicat de F ?
2. On considère les symboles s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 et s_6 appartenant à $X \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ à partir desquels on définit la formule $F = \exists s_3 ((s_1(s_2, s_3) \wedge s_4(s_5(s_2))) \Rightarrow \forall s_6 s_1(s_5(s_6), s_3))$.
 - (a) Quelles sont les formules atomiques apparaissant dans F ?
 - (b) Déterminer à quels ensembles chacun des symboles s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 et s_6 peut appartenir (c-à-d déterminer s'il peut s'agir d'un symbole de variable de X , d'un symbole de constante de \mathcal{F}_0 , d'un symbole de fonction de \mathcal{F} ou d'un symbole de prédicat de \mathcal{P}).

Exercice 1.5 ((*) Occurrences libres et liées d'une variable, Clôture universelle)

A partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{x, y, z, w_1, w_2, w_3, \dots\}$ on définit la formule $F = p(a, g(h(x), b)) \wedge \forall x (\exists x \forall z p(x, f(b, y, z)) \vee \exists y q(x, h(y), z))$.

1. Déterminer l'ensemble $\text{Free}(F)$ des variables qui ont au moins une occurrence libre dans F .
2. Le symbole de variable x admet 3 occurrences dans la formule F , numérotées de 1 à 3 comme suit :

$$p(a, g(h(\underbrace{x}_1), b)) \wedge \forall x (\exists x \forall z p(\underbrace{x}_2, f(b, y, z)) \vee \exists y q(\underbrace{x}_3, h(y, z)))$$

Pour chacune de ces occurrences, déterminer si elle correspond à une occurrence libre de x , à une occurrence quantifiée universellement ($\forall x$) de x ou bien à une occurrence quantifiée existentiellement ($\exists x$) de x .

3. Déterminer une clôture universelle de la formule F .
4. Proposer une formule logique F' ayant la même signification que F , telle que $\text{Free}(F') \cap \text{Bound}(F') = \emptyset$ et dans laquelle chaque symbole de variable est dans la portée d'au plus un quantificateur.

Exercice 1.6 ((*) Construction de formules)

Soit $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ la formule représentée par :

$$(\forall y \square (\square, \square (\square, \square))) \Rightarrow ((\square \square \exists \square \square (\square (\square, \square))) \vee \square (\square, \square))$$

où chaque case peut contenir un unique symbole : soit un quantificateur, soit un symbole de l'ensemble $X = \{x, y, z\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_0 = \{k\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{f\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 = \{p\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{q\}$. On souhaite que F vérifie les contraintes suivantes :

- x admet uniquement deux occurrences libres et une occurrence liée par le quantificateur \forall dans F ,
 - y admet uniquement une occurrence liée par le quantificateur \forall et une occurrence liée par le quantificateur \exists dans F ,
 - z admet uniquement une occurrence libre dans F ,
1. Remplir les cases de F pour que les contraintes soient respectées.
 2. Dessiner l'arbre de syntaxe de la formule F et encadrer les occurrences libres de variable.
 3. Proposer une clôture universelle F' de F puis renommer certains symboles de variable de F' pour obtenir une formule F'' logiquement équivalente à F' et dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents.

Exercice 1.7 ((*) Formules et substitutions)

A partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{x, y, z\}$ on définit les formules ci-dessous :

$$F_1 = \forall x (p(x, y, z) \Rightarrow \exists y (q(f(x, y), z) \vee \forall z (q(f(x, z), f(y, a))))))$$

$$F_2 = \forall x ((\exists z p(x, y, z)) \vee (\neg \forall y (q(f(x, y), z) \wedge q(f(x, z), f(y, a)))))$$

1. Quels sont les symboles de fonction et de constante apparaissant dans F_1 ? dans F_2 ?
2. Quels sont les symboles de prédicat apparaissant dans F_1 ? dans F_2 ?
3. Déterminer les ensembles $\text{Free}(F_1)$ et $\text{Free}(F_2)$.
4. Déterminer une clôture universelle de F_1 et de F_2 .
5. Calculer :

$$(a) \quad F_1[x := f(y, a)] \text{ et } F_2[x := f(y, a)] \quad (b) \quad F_1[y := f(x, z)] \text{ et } F_2[y := f(x, z)]$$

$$(c) \quad F_1[z := f(y, a)] \text{ et } F_2[z := f(y, a)]$$

Exercice 1.8 ((*) Formules et substitutions)

Soit F la formule : $(\exists x (p(x, f(x)) \Rightarrow \forall x q(x))) \wedge (q(x) \vee \forall x p(f(x), x))$.

1. Dessiner l'arbre de syntaxe abstraite de la formule F .
2. On numérote les occurrences du symbole de variable x comme suit :

$$\left(\exists x \left(p(x_{(1)}, f(x_{(2)})) \Rightarrow \forall x q(x_{(3)}) \right) \right) \wedge \left(q(x_{(4)}) \vee \forall x p(f(x_{(5)}), x_{(6)}) \right)$$

Indiquer pour chacune des six occurrences de x s'il s'agit d'une occurrence quantifiée universellement, d'une occurrence quantifiée existentiellement ou d'une occurrence libre.

3. Calculer $F[x := h(z, w)]$. On note $F_1 = F[x := h(z, w)]$ cette formule.
4. Soit $F_2 = \forall z F_1$. Calculer $F_2[w := g(x, z, w)]$. On note $F_3 = F_2[w := g(x, z, w)]$ cette formule.
5. Déterminer $\text{Free}(F_3)$.
6. Déterminer une clôture universelle de F_3 .
7. Donner une formule logiquement équivalente à F_3 telle que chaque quantificateur porte sur un symbole de variable différent qui n'admet aucune occurrence libre dans la formule.

Exercice 1.9 ((*) Substitutions)

1. Soit F la formule $\exists y ((\forall y q(z, f(y, x))) \wedge p(y)) \Rightarrow q(f(x, y), z)$ (où x, y et z sont des symboles de variable). Calculer $F[x := g(x, y, z)]$ et $F[y := g(x, y, z)]$.
2. Soit F la formule $\forall x (q(x, y) \vee \exists x p(x, y, z))$ (où x, y et z sont des symboles de variable). Calculer $F[x := f(x, y, z)]$ et $F[y := f(x, y, z)]$.

Exercice 1.10 (Expressions arithmétiques : définitions inductives)

On considère l'ensemble des expressions arithmétiques défini par l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ construit à partir d'un ensemble X de variables, et de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{F}_2 = \{+, -, \times, /\}$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.
2. Donner une définition inductive du nombre d'occurrences d'opérateurs $n_{\text{op}}(e)$, du nombre d'occurrences de constantes $n_{\text{cst}}(e)$ et du nombre d'occurrences de variables $n_{\text{var}}(e)$ dans une expression arithmétique e .
3. Particulariser le schéma de raisonnement par induction sur $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.
4. Montrer par induction que pour toute expression e on a :

$$n_{\text{op}}(e) = n_{\text{var}}(e) + n_{\text{cst}}(e) - 1$$