



TD5 : Interprétation des variables et des quantificateurs

Les exercices annotés par le symbole \star correspondent à des exercices (en partie) issus des annales dont la correction est disponible sur la page web de l'UE.

Exercice 5.1 (Interprétation des termes et valuations)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{s\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\otimes\}$ et soit $t = s(\otimes(s(s(a)), \otimes(x, s(y))))$ un terme de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.
2. Dessiner l'arbre représentant le terme t .
3. On considère une structure \mathbf{M} de domaine \mathbb{N} telle que :

$$\begin{aligned} a^{\mathbf{M}} &= 2 & s^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & \otimes^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ b^{\mathbf{M}} &= 3 & s^{\mathbf{M}}(n) &= n + 1 & \otimes^{\mathbf{M}}(n, m) &= n \times m \end{aligned}$$

- (a) Calculer $[t]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{v}(x)$ et $\mathbf{v}(y)$.
- (b) Soit une valuation \mathbf{v}_1 telle que $\mathbf{v}_1(x) = 5$ et $\mathbf{v}_1(y) = 1$. Calculer $[t]_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{M}}$.
- (c) Déterminer une valuation $\mathbf{v}_2 : X \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $[t]_{\mathbf{v}_2}^{\mathbf{M}} = 33$.
- (d) Calculer $[t]_{\mathbf{v}_3}^{\mathbf{M}}$ pour la valuation $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1[x \leftarrow 7]$.

Exercice 5.2 (\star) Interprétation des formules

On considère un plateau carré contenant 36 cases dans lesquelles peuvent être placées des pièces qui sont soit rondes soit carrées. Chaque case est désignée par ses coordonnées (ℓ, c) (désignant respectivement un numéro de ligne et un numéro de colonne) et contient au plus une pièce. Une pièce est représentée par un tuple (p, ℓ, c) où $p \in \{\square, \bigcirc\}$ désigne la forme de la pièce, ℓ le numéro de ligne et c le numéro de colonne où se trouve la pièce. On peut représenter un plateau par l'ensemble des pièces qu'il contient. Voici un exemple de plateau noté P_{ex} (les coordonnées de chaque case figurent en bas des cases).

(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)
\square	\bigcirc				
(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
	\bigcirc				
(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
			\square		
(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
				\bigcirc	
(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)

$$P_{\text{ex}} = \left\{ \begin{array}{l} (\square, 4, 0), \\ (\bigcirc, 4, 1), \\ (\bigcirc, 3, 1), \\ (\square, 2, 3), \\ (\bigcirc, 0, 4) \end{array} \right\}$$

Etant donné un plateau P , on définit une structure \mathbf{M}_P dont le domaine est $|\mathbf{M}_P| = P$. On considère l'ensemble de prédicats $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1 = \{\text{est_rond}, \text{est_carre}\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{\text{est_a_gauche}\}$ et tel que :

- $\text{est_rond}(x)$ signifie que la pièce x située sur le plateau est ronde
- $\text{est_carre}(x)$ signifie que la pièce x située sur le plateau est carrée

- $\text{est_a_gauche}(x, y)$ signifie que la pièce x est dans une case qui se trouve à gauche de la case contenant la pièce y : une case de coordonnées (ℓ, c) est à gauche d'une case de coordonnées (ℓ', c') lorsque $c < c'$
- 1. Définir les ensembles $\text{est_rond}^{\mathbf{M}_P}$, $\text{est_carre}^{\mathbf{M}_P}$ et $\text{est_a_gauche}^{\mathbf{M}_P}$ obtenus à partir d'un plateau P quelconque. Donner les éléments de ces ensembles pour le plateau P_{ex} donné en exemple.
- 2. On considère l'énoncé « *Il existe une pièce ronde située à gauche de toutes les pièces carrées.* ».
 - (a) Proposer une formule F permettant d'exprimer cet énoncé.
 - (b) Montrer que $[F]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} = 0$ (pour toute valuation \mathbf{v}).
 - (c) Proposer un plateau P_{new} tel que $[F]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}_{P_{\text{new}}}} = 1$ (pour toute valuation \mathbf{v}).

Exercice 5.3 ((★) Interprétation des termes et des formules)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{0\}$, $\mathcal{F}_1 = \{c\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \otimes\}$ et X un ensemble de symboles de variable. On considère l'ensemble $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ des termes avec variables. Soit t le terme $t = \oplus(x, \otimes(y, c(z)))$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \{0, c, \oplus, \otimes\}$.
2. Dessiner l'arbre représentant le terme t .
3. On définit la structure \mathbf{M} dont le domaine $|\mathbf{M}|$ est l'ensemble des parties $\wp(A)$ de l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Chaque élément $m \in |\mathbf{M}|$ est donc un sous-ensemble de l'ensemble A . Les symboles de \mathcal{F} sont interprétés comme suit.

$$\begin{array}{ll}
 0^{\mathbf{M}} = \emptyset \in |\mathbf{M}| & c^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \rightarrow |\mathbf{M}| \\
 (\text{ensemble vide}) & c^{\mathbf{M}}(E) = \overline{E} = A \setminus E = \{e \in A \mid e \notin E\} \\
 & (\text{complémentaire de } E) \\
 \\
 \oplus^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \times |\mathbf{M}| \rightarrow |\mathbf{M}| & \otimes^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \times |\mathbf{M}| \rightarrow |\mathbf{M}| \\
 \oplus^{\mathbf{M}}(E_1, E_2) = E_1 \cup E_2 & \otimes^{\mathbf{M}}(E_1, E_2) = E_1 \cap E_2 \\
 (\text{union}) & (\text{intersection})
 \end{array}$$

Par exemple, on a :

$$\begin{aligned}
 c^{\mathbf{M}}(\{1, 3, 6\}) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 3, 6\} = \{2, 4, 5, 7\} \\
 \oplus^{\mathbf{M}}(\{1, 2, 4, 7\}, \{1, 2, 3, 4\}) &= \{1, 2, 4, 7\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 7\} \\
 \otimes^{\mathbf{M}}(\{1, 2, 4, 7\}, \{1, 2, 3, 4\}) &= \{1, 2, 4, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 4\}
 \end{aligned}$$

On considère la valuation $\mathbf{v}_1 : X \rightarrow |\mathbf{M}|$ telle que $\mathbf{v}_1(x) = \{5, 6, 7\}$, $\mathbf{v}_1(y) = \emptyset$ et $\mathbf{v}_1(z) = \{4\}$. Calculer $[t]_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{M}}$.

4. On considère à présent l'ensemble de symboles de prédicat $\mathcal{P} = \{\text{eq}\}$ contenant un unique élément eq correspondant au prédicat d'arité 2 d'égalité dont l'interprétation est définie par $\text{eq}^{\mathbf{M}} = \{(E_1, E_2) \mid E_1 = E_2\}$.
 - (a) Soit F_1 la formule $\exists z \text{eq}(x, \oplus(y, z))$. Quelle propriété sur $\mathbf{v}(x)$ et $\mathbf{v}(y)$ doit être vérifiée pour que $[F_1]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}} = 1$?
 - (b) Soit F_2 la formule $\forall x \forall y (F_1 \Rightarrow \text{eq}(\otimes(y, c(x)), 0))$. Calculer $[F_2]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}}$.

\mathbf{M}	$ \mathbf{M} $	$r^{\mathbf{M}}$
\mathbf{M}_1	\mathbb{N} (entiers naturels)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_1 < n_2\}$
\mathbf{M}_2	\mathbb{N} (entiers naturels)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_1 \leq n_2\}$
\mathbf{M}_3	\mathbb{Z} (entiers relatifs)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n_1 < n_2\}$
\mathbf{M}_4	\mathbb{Z} (entiers relatifs)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n_1 \leq n_2\}$
\mathbf{M}_5	\mathbb{Q} (nombres rationnels)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid n_1 < n_2\}$
\mathbf{M}_6	\mathbb{Q} (nombres rationnels)	$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid n_1 \leq n_2\}$
\mathbf{M}_7	$\wp(\mathbb{N})$ (parties de \mathbb{N})	$\{(E_1, E_2) \in \wp(\mathbb{N}) \times \wp(\mathbb{N}) \mid E_1 \subset E_2\}$
\mathbf{M}_8	$\wp(\mathbb{N})$ (parties de \mathbb{N})	$\{(E_1, E_2) \in \wp(\mathbb{N}) \times \wp(\mathbb{N}) \mid E_1 \subseteq E_2\}$

TABLE 1 – Structures de l'exercice 5.6

Exercice 5.4 (Quantification de formules atomiques)

On considère une structure \mathbf{M} dont le domaine d'interprétation est l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels et dans laquelle l'interprétation du symbole de prédicat $p \in \mathcal{P}_2$ est définie par $p^{\mathbf{M}} = \{(x, y) \mid y = 2x\}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont satisfaites par \mathbf{M} ?

$$\begin{array}{lll}
(F_1) & p(0, 0) & (F_2) \quad p(1, 1) & (F_3) \quad \exists x p(1, x) \\
(F_4) & \exists x p(x, 1) & (F_5) \quad \exists x p(x, 2) & (F_6) \quad \forall x p(1, x) \\
(F_7) & \forall x p(x, 1) & (F_8) \quad \exists x \exists y p(x, y) & (F_9) \quad \exists x \forall y p(x, y) \\
(F_{10}) & \forall x \exists y p(x, y) & (F_{11}) \quad \forall x \forall y p(x, y) &
\end{array}$$

Exercice 5.5 (Domaine d'interprétation)

On considère un langage comprenant l'égalité (prédicat = d'arité 2) ainsi qu'un symbole de prédicat p d'arité 2. Soit les deux formules :

$$(F_1) \quad \forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow \neg(x = y)) \quad (F_2) \quad \forall x \exists y (p(x, y) \wedge \neg(x = y))$$

Pour chacune de ces deux formules, déterminer s'il existe une structure \mathbf{M} qui la satisfait :

- lorsque le domaine d'interprétation de \mathbf{M} est un singleton,
- lorsque le domaine d'interprétation de \mathbf{M} contient uniquement deux éléments,
- lorsque le domaine d'interprétation de \mathbf{M} est l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} et lorsque $p^{\mathbf{M}} = \{(x, y) \mid x \text{ est divisible par } y\}$.

Exercice 5.6 (Interprétation des formules)

Quelles sont parmi les formules closes ci-dessous celles qui sont satisfaites par les structures du tableau 1 ?

$$\begin{array}{lll}
(F_1) \quad \forall x (\neg r(x, x) \wedge \forall y ((r(x, y) \Rightarrow \neg r(y, x)) \wedge \forall z ((r(x, y) \wedge r(y, z)) \Rightarrow r(x, z))) & & \\
(F_2) \quad \exists x \forall y r(x, y) & (F_3) \quad \forall x \exists y r(x, y) & (F_4) \quad \exists x \forall y r(y, x) \\
(F_5) \quad \forall x \exists y r(y, x) & (F_6) \quad \forall x \forall y (r(x, y) \Rightarrow \exists z (r(x, z) \wedge r(z, y))) &
\end{array}$$

Exercice 5.7 ((*) Interprétation des formules)

On considère les deux formules :

$$(F_1) \quad \forall x_1 \forall x_2 (\text{eq}(f(x_1), f(x_2)) \Rightarrow \text{eq}(x_1, x_2)) \quad (F_2) \quad \forall y \exists x \text{eq}(y, f(x))$$

Soit \mathbf{M} une structure telle que $|\mathbf{M}| = \{a\}$ et $\text{eq}^{\mathbf{M}} = \{(a, a)\}$. Montrer que $[F_1]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}} = 1$ et $[F_2]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{M}} = 1$ où \mathbf{v} est une valuation quelconque.

Exercice 5.8 ((*) Interprétation des formules)

- Soit \mathbf{M} une structure telle que $|\mathbf{M}| = \{a, b, c\}$ et F_1 la formule $\exists x \forall y p(x, y)$.
 - Proposer une interprétation $p^{\mathbf{M}}$ de p telle que $p^{\mathbf{M}}$ contienne exactement 3 éléments (c-à-d 3 paires d'éléments de $|\mathbf{M}|$) et telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$ (quelle que soit la valuation v) et montrer que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$.
 - Proposer une interprétation $p^{\mathbf{M}}$ de p telle que $p^{\mathbf{M}}$ contienne exactement 3 éléments (c-à-d 3 paires d'éléments de $|\mathbf{M}|$) et telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 0$ (quelle que soit la valuation v) et montrer que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 0$.
- Soit F_2 la formule $\exists x ((\forall y p(x, y)) \Rightarrow \exists z p(z, x))$.
 - Le domaine d'interprétation d'une structure peut-il être vide ?
 - Montrer que si eq désigne le prédicat d'égalité, c-à-d si $\text{eq}^{\mathbf{M}} = \{(k, k) \mid k \in |\mathbf{M}|\}$, alors $[\exists x \text{eq}(x, x)]_v^{\mathbf{M}} = 1$ (quelle que soit la valuation v).
 - Montrer que la formule F_2 est valide.
- A-t-on $F_2 \models F_1$? $F_1 \models F_2$? Justifier vos réponses.

Exercice 5.9 ((*) Satisfiabilité)

On considère les deux formules $F_1 = \forall x \exists y p(x, y)$ et $F_2 = \exists y \forall x p(x, y)$.

- Définir une structure \mathbf{M}_1 telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_1} = [F_2]_v^{\mathbf{M}_1} = 1$ pour toute valuation v .
- Définir une structure \mathbf{M}_2 telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_2} = [F_2]_v^{\mathbf{M}_2} = 0$ pour toute valuation v .
- Définir une structure \mathbf{M}_3 telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_3} = 1$ et $[F_2]_v^{\mathbf{M}_3} = 0$ pour toute valuation v .
- Existe-t-il une structure \mathbf{M}_4 telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_4} = 0$ et $[F_2]_v^{\mathbf{M}_4} = 1$ pour toute valuation v . Pourquoi ?

Exercice 5.10 ((*) Formules satisfiables, formules valides)

Montrer que les formules ci-dessous sont satisfiables mais ne sont pas valides.

- $$\begin{aligned}
 (F_1) \quad & \forall y \exists x (p(x, y) \wedge (\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z))) \\
 (F_2) \quad & \forall x \forall y (q(x, y) \Rightarrow \exists z (q(x, z) \wedge q(z, y))) \\
 (F_3) \quad & (\forall y \exists x p(x, y)) \Rightarrow \exists x p(x, x) \\
 (F_4) \quad & \forall x ((\exists y p(x, y)) \Rightarrow \exists z p(z, x))
 \end{aligned}$$

Exercice 5.11 ((*) Formules satisfiables, formules valides)

Pour chacune des formules ci-dessous, pouvez-vous trouver une structure qui satisfait la formule ? qui l'invalide ? La formule est-elle satisfiable ? valide ?

- $$\begin{aligned}
 (F_1) \quad & (\exists x p(x)) \Rightarrow (\forall x p(x)) \\
 (F_2) \quad & (\forall x p(x)) \Rightarrow (\exists x p(x)) \\
 (F_3) \quad & \forall x (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)) \\
 (F_4) \quad & (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge q(x)) \\
 (F_5) \quad & \exists x (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)) \\
 (F_6) \quad & (\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)) \Rightarrow \exists x (p(x) \wedge q(x)) \\
 (F_7) \quad & \forall x (p(x) \vee q(x)) \Rightarrow (\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \\
 (F_8) \quad & (\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \vee q(x)) \\
 (F_9) \quad & \exists x (p(x) \vee q(x)) \Rightarrow (\exists x p(x) \vee \exists x q(x)) \\
 (F_{10}) \quad & (\exists x p(x) \vee \exists x q(x)) \Rightarrow \exists x (p(x) \vee q(x))
 \end{aligned}$$