



TME Edukera sur les échiquiers : Structures

Les exercices sur les échiquiers proposés sur la plateforme Edukera reposent sur un mécanisme permettant de vérifier si des propriétés sur les pièces placées sur un échiquier exprimées par une formule logique sont satisfaites par un échiquier donné. Par exemple, avec l'échiquier de la figure 2, la formule exprimant que tous les pions sont sur la même ligne est "vraie" tandis que la formule exprimant que le fou est de la même couleur que le cavalier est "fausse". Il est ici possible de déplacer les pièces de cet échiquier pour changer le résultat de l'interprétation de ces deux formules.

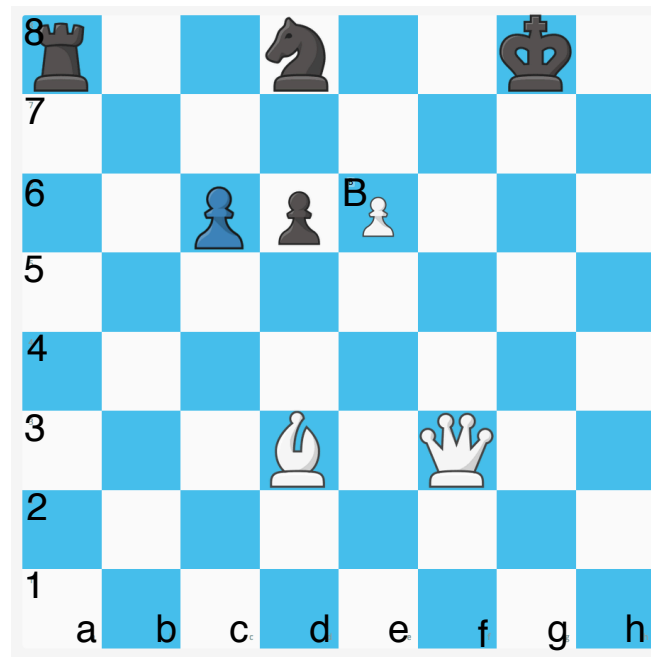


FIGURE 2 – Exemple d'échiquier de la plateforme Edukera

1 Termes

Syntaxe : définition de l'ensemble des termes

L'ensemble $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ des termes considérés contient uniquement des constantes et des variables (la signature utilisée ne contient aucun symbole de fonction d'arité strictement positive) désignant des pièces sur un échiquier. Ces termes sont construits à partir d'un ensemble \mathcal{F}_0 contenant 8 symboles

de constante (les 8 premières lettres de l'alphabet en majuscule) et d'un ensemble X contenant 26 symboles de variable (les lettres de l'alphabet en minuscule).

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \mathcal{F}_0 = \{A, B, C, D, E, F, G, H\} \\ X &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}\end{aligned}$$

Les symboles de constante vont servir à nommer des pièces sur l'échiquier.

Interprétation des termes : construction d'un échiquier

Les termes désignent des pièces positionnées sur un échiquier contenant 8 colonnes (les abscisses de gauche à droite sont désignées par les lettres a, b, c, d, e, f, g et h) et 8 lignes (les ordonnées du bas vers le haut sont désignées par les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8). Par exemple, le pion nommé B sur l'échiquier de la figure 2 se trouve sur la case de coordonnées (e,6).

A chaque pièce placée sur l'échiquier, on associe une position, une espèce, une couleur et une taille (il y a au plus une pièce par case de l'échiquier). L'ensemble Pos des positions possibles contient l'ensemble des coordonnées de l'échiquier :

$$\text{Pos} = \left\{ \begin{array}{cccccccc} (a, 8) & (b, 8) & (c, 8) & (d, 8) & (e, 8) & (f, 8) & (g, 8) & (h, 8) \\ (a, 7) & (b, 7) & (c, 7) & (d, 7) & (e, 7) & (f, 7) & (g, 7) & (h, 7) \\ (a, 6) & (b, 6) & (c, 6) & (d, 6) & (e, 6) & (f, 6) & (g, 6) & (h, 6) \\ (a, 5) & (b, 5) & (c, 5) & (d, 5) & (e, 5) & (f, 5) & (g, 5) & (h, 5) \\ (a, 4) & (b, 4) & (c, 4) & (d, 4) & (e, 4) & (f, 4) & (g, 4) & (h, 4) \\ (a, 3) & (b, 3) & (c, 3) & (d, 3) & (e, 3) & (f, 3) & (g, 3) & (h, 3) \\ (a, 2) & (b, 2) & (c, 2) & (d, 2) & (e, 2) & (f, 2) & (g, 2) & (h, 2) \\ (a, 1) & (b, 1) & (c, 1) & (d, 1) & (e, 1) & (f, 1) & (g, 1) & (h, 1) \end{array} \right\}$$

Chaque pièce appartient à une espèce (les espèces sont présentées sur la figure 3), est d'une certaine taille (grande, moyenne ou petite) et d'une certaine couleur (blanche, noire, bleue). Les ensembles d'espèces, de tailles et de couleurs sont définis par :

$$\begin{aligned}\text{Esp} &= \{e_roi, e_reine, e_tour, e_fou, e_cavalier, e_pion\} \\ \text{Tailles} &= \{t_petit, t_moyen, t_grand\} \\ \text{Couleurs} &= \{c_blanc, c_noir, c_bleu\}\end{aligned}$$

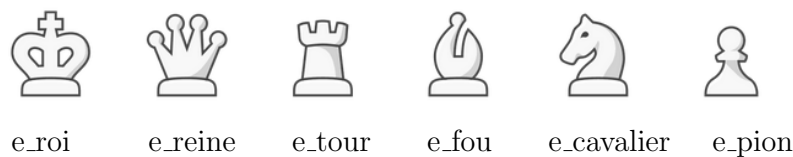


FIGURE 3 – Espèces des pièces de l'échiquier de la plateforme Edukera

Certaines pièces ont un nom : il s'agit d'une constante de \mathcal{F}_0 . Par convention la valeur **None** sert à nommer les pièces anonymes (i.e. sans nom). Deux pièces différentes ne peuvent pas avoir le même nom lorsque ce nom est un élément de \mathcal{F}_0 . Autrement dit tous les symboles de \mathcal{F}_0 ne servent pas nécessairement à nommer une pièce de l'échiquier et un nom de \mathcal{F}_0 ne peut pas servir à nommer deux pièces différentes. Un échiquier E est la donnée d'une grille sur laquelle sont disposées des

pièces et est représenté par un ensemble de quintuplets. Chaque quintuplet $((x, y), e, t, c, n) \in E$ est un élément du produit cartésien :

$$\text{Pos} \times \text{Esp} \times \text{Tailles} \times \text{Couleurs} \times (\mathcal{F}_0 \cup \{\text{None}\})$$

et exprime qu'une pièce de nom n ($n = \text{None}$ si la pièce n'a pas de nom), d'espèce e , de taille t et de couleur c se trouve à la position (x, y) sur l'échiquier E . L'ensemble des échiquiers possibles est donc :

$$\mathbf{E} = \wp(\text{Pos} \times \text{Esp} \times \text{Tailles} \times \text{Couleurs} \times (\mathcal{F}_0 \cup \{\text{None}\}))$$

où lorsque S est un ensemble, $\wp(S)$ désigne l'ensemble des parties de S .

Exercice 1 Donner les éléments de l'ensemble E correspondant à l'échiquier représenté sur la figure 2 (sur cette figure, les pièces qui ne sont pas des pions sont toutes grandes et seul le petit pion blanc a un nom qui est B).

Interprétation des termes : construction d'une structure à partir d'un échiquier

Etant donné un échiquier $E \in \mathbf{E}$, on construit une structure \mathbf{M}_E permettant d'interpréter l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$. La structure \mathbf{M}_E est définie par :

- un domaine d'interprétation correspondant à l'ensemble de tous les quintuplets représentant les pièces positionnées sur l'échiquier E , auquel on ajoute un élément particulier (Error) :

$$|\mathbf{M}_E| = \{((x, y), e, t, c, n) \in E\} \cup \{\text{Error}\}$$

- une fonction d'interprétation qui associe un élément de $|\mathbf{M}_E|$ à chaque symbole de constante de \mathcal{F}_0 désignant une pièce de l'échiquier E : il s'agit du quintuplet correspondant à cette pièce sur l'échiquier (si aucune pièce de nom n se trouve sur l'échiquier, l'interprétation de n déclenche une erreur qui peut être vue comme une valeur particulière Error du domaine d'interprétation) :

$$n^{\mathbf{M}_E} = \begin{cases} ((x, y), e, t, c, n) & \text{si } ((x, y), e, t, c, n) \in E \\ \text{Error} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2 On considère à nouveau l'échiquier représenté sur la figure 2. Quelle est la valeur de $A^{\mathbf{M}_E}$? de $B^{\mathbf{M}_E}$?

2 Formules logiques

Symboles de prédicat

Les formules logiques de $\text{IF}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ expriment des propriétés sur les pièces d'un échiquier. Elles sont construites à partir de l'ensemble X de symboles de variable, de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ de symboles de constante et de l'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ de symboles de prédicat où :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \{\text{roi, reine, tour, fou, cavalier, pion, blanc, noir, bleu, petit, moyen, grand}\} \\ \mathcal{P}_2 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{droiteDe, gaucheDe, basDe, hautDe, plusPetit, plusGrand,} \\ \text{idLigne, idColonne, idTaille, idCouleur, =} \end{array} \right\} \\ \mathcal{P}_3 &= \{\text{entre}\} \end{aligned}$$

Interprétation des prédicats : construction d'une structure à partir d'un échiquier (suite)

Etant donné un échiquier E , l'interprétation d'un symbole de prédicat $p \in \mathcal{P}_k$ ($k \in \{1, 2, 3, \dots\}$) est un ensemble de k -uplets de valeurs du domaine d'interprétation, c'est-à-dire un ensemble de k -uplets de quintuplets correspondant aux pièces placées sur l'échiquier. L'interprétation des prédicats d'espèce, de couleur et de taille de \mathcal{P}_1 est définie en examinant les quintuplets de E et en considérant la propriété souhaitée. Par exemple, l'interprétation du prédicat pion avec la structure $|\mathbf{M}_E|$ est définie par :

$$\text{pion}^{\mathbf{M}_E} = \{((x, y), e_pion, t, c, n) \in E\}$$

Si E est l'échiquier représenté sur la figure 2, on a donc :

$$\text{pion}^{\mathbf{M}_E} = \left\{ \begin{array}{l} ((c, 6), e_pion, c_bleu, t_grand, \text{None}), ((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), \\ ((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B) \end{array} \right\}$$

L'interprétation des prédicats de \mathcal{P}_2 et \mathcal{P}_3 est similaire mais nécessite des opérations de comparaison sur les composants des quintuplets de E . Par exemple, l'interprétation du prédicat plusPetit avec la structure $|\mathbf{M}_E|$ est définie par :

$$\text{plusPetit}^{\mathbf{M}_E} = \left\{ \begin{array}{l} (((x_1, y_1), e_1, t_1, c_1, n_1), ((x_2, y_2), e_2, t_2, c_2, n_2)) \in E \times E \\ \mid \left(\begin{array}{l} t_1 = t_petit \text{ et } (t_2 = t_moyen \text{ ou } t_2 = t_grand) \\ \text{ou } (t_1 = t_moyen \text{ et } t_2 = t_grand) \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

Si E est l'échiquier représenté sur la figure 2, on a donc :

$$\text{plusPetit}^{\mathbf{M}_E} = \left\{ \begin{array}{l} (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None})), \\ (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((c, 6), e_pion, c_bleu, t_grand, \text{None})), \\ (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((d, 3), e_fou, c_blanc, t_grand, \text{None})), \\ (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((f, 3), e_reine, c_blanc, t_grand, \text{None})), \\ (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((a, 8), e_tour, c_noir, t_grand, \text{None})), \\ (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((d, 8), e_cavalier, c_noir, t_grand, \text{None})), \\ (((e, 6), e_pion, c_blanc, t_petit, B), ((g, 8), e_roi, c_noir, t_grand, \text{None})), \\ (((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), ((c, 6), e_pion, c_bleu, t_grand, \text{None})), \\ (((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), ((d, 3), e_fou, c_blanc, t_grand, \text{None})), \\ (((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), ((f, 3), e_reine, c_blanc, t_grand, \text{None})), \\ (((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), ((a, 8), e_tour, c_noir, t_grand, \text{None})), \\ (((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), ((d, 8), e_cavalier, c_noir, t_grand, \text{None})), \\ (((d, 6), e_pion, c_noir, t_moyen, \text{None}), ((g, 8), e_roi, c_noir, t_grand, \text{None})) \end{array} \right\}$$

Exercice 3 Etant donné un échiquier E , définir $p^{\mathbf{M}_E}$ pour tous les symboles de prédicat de \mathcal{P} .

Exercice 4 On considère à nouveau l'échiquier E représenté sur la figure 2. Donner les éléments de l'ensemble $p^{\mathbf{M}_E}$ pour tous les symboles de prédicat de \mathcal{P} .