

Examen 1ère session du 16/12/2016

Durée 2h

Téléphones, calculettes et ordinateurs interdits. Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Dédution Naturelle. Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie. **Conserver l'étiquette portant votre numéro d'anonymat, elle sera demandée pour toute consultation de copie.** La note (entre 0 et 80) est le minimum entre 80 et la somme des points obtenus (entre 0 et 91).

Exercice 1 (2+4+(2+2+2+2)=14 points)

- Donner la définition (mathématique) d'une formule (de la logique des propositions) satisfiable.
- Démontrer que la formule $\neg F$ est non satisfiable si et seulement si F est valide.
- Soit F une formule non satisfiable et G une formule ni valide, ni non satisfiable.
 - A-t-on $F \models G$? (Justifier)
 - A-t-on $G \models F$? (Justifier)
 - A-t-on $\neg F \models G$? (Justifier)
 - A-t-on $G \models \neg F$? (Justifier)

Exercice 2 (4+4+10=18 points)

On considère la formule $F = (p \Rightarrow \neg p) \vee (\neg p \Rightarrow p)$.

- Etant donnée une interprétation \mathbf{I} , calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{I}}$ en fonction de $\mathbf{I}(p)$ (sans effectuer de simplifications).
- A l'aide d'un raisonnement équationnel, en indiquant le nom de l'équivalence utilisée à chaque étape, montrer que la formule F est valide.
- En utilisant les règles de la Dédution Naturelle du formulaire, prouver la formule F . Il pourra être judicieux d'utiliser la règle du Tiers Exclu pour obtenir une preuve dont la structure est donnée ci-dessous.

$\langle 1 \rangle$	montrons $(p \Rightarrow \neg p) \vee (\neg p \Rightarrow p)$
$\langle 2 \rangle$	montrons $p \vee \neg p$
$\langle 2 \rangle$	CQFD (TE)
\vdots	
$\langle 1 \rangle$	CQFD (E_{\vee})

Exercice 3 ((3+2+2)+(5+5)=17 points)

- On considère le symbole de prédicat p d'arité 2 tel que $p(x_1, x_2)$ signifie " x_1 est un triangle équilatéral de hauteur x_2 ".
 - Exprimer par une formule F_1 de la logique du premier ordre la propriété : "*il existe au plus un triangle équilatéral dont la hauteur est z* " (où z est un symbole de variable). On pourra utiliser le prédicat $=$ d'arité 2 pour exprimer l'égalité.
 - Déterminer l'ensemble $\text{Free}(F_1)$ des variables qui admettent au moins une occurrence libre dans la formule F_1 .
 - Déterminer la clôture universelle de F_1 .
- On considère la formule $F_2 = \forall y \exists x (p(x, y) \wedge (\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z)))$
 - La formule F_2 est-elle satisfiable ? Si oui définir une structure dans laquelle la formule est vraie en justifiant pourquoi elle est vraie, si non prouver que la formule n'est pas satisfiable.
 - La formule F_2 est-elle valide ? Si oui en donner une preuve, si non définir une structure dans laquelle la formule est fausse en justifiant pourquoi elle est fausse.

Exercice 4 (10+10=20 points)

En utilisant les règles de la Dédution Naturelle, prouver les deux formules ci-dessous.

1. $(\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
2. $(F_1 \wedge F_2) \Rightarrow F_3$ où $F_1 = \forall x (p(x) \Rightarrow q(x))$, $F_2 = \exists x (q(x) \Rightarrow r(x))$, et $F_3 = \exists x (p(x) \Rightarrow r(x))$

Exercice 5 (2+2+(6+4+8)=22 points)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{k_\varepsilon\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{\text{cons}_0, \text{cons}_1\}$ (c-à-d k_ε est un symbole de constante et cons_0 et cons_1 sont des symboles de fonction d'arité 1). On définit le terme $t = \text{cons}_1(\text{cons}_1(\text{cons}_0(\text{cons}_1(k_\varepsilon))))$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \{k_\varepsilon, \text{cons}_0, \text{cons}_1\}$.
2. On considère l'alphabet $A = \{0, 1\}$ et on définit la structure \mathbf{M}_1 de domaine A^* (où A^* est l'ensemble des mots de longueur finie constitués à partir des lettres 0 et 1) comme suit.

$$\begin{array}{lll} k_\varepsilon^{\mathbf{M}_1} = \varepsilon & \text{cons}_0^{\mathbf{M}_1} : A^* \rightarrow A^* & \text{cons}_1^{\mathbf{M}_1} : A^* \rightarrow A^* \\ (\text{mot vide de longueur } 0) & \text{cons}_0^{\mathbf{M}_1}(w) = 0w & \text{cons}_1^{\mathbf{M}_1}(w) = 1w \end{array}$$

où $0w$ (resp. $1w$) est le mot obtenu en ajoutant la lettre 0 (resp. 1) en tête du mot w . Calculer $[t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}$ (pour une valuation v_1 quelconque).

3. Définir une structure \mathbf{M}_2 dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ des booléens et telle que $[t]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} = 1$ si le nombre d'occurrences de la lettre 1 dans le mot $[t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}$ est impair, et $[t]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} = 0$ si le nombre d'occurrences de la lettre 1 dans dans le mot $[t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}$ est pair. Seuls les opérateurs booléens classiques (\neg , \cdot et $+$) pourront être utilisés dans la définition de cette structure. Calculer $[t]_{v_2}^{\mathbf{M}_2}$ (pour une valuation v_2 quelconque).

4. On considère l'ensemble $\mathbb{N}_{/\equiv_2} = \{0, 1\}$ des entiers modulo 2 sur lequel l'addition modulaire $\oplus_2 : (\mathbb{N}_{/\equiv_2} \times \mathbb{N}_{/\equiv_2}) \rightarrow \mathbb{N}_{/\equiv_2}$ est définie par :

$$0 \oplus_2 0 = 0 \quad 0 \oplus_2 1 = 1 \quad 1 \oplus_2 0 = 1 \quad 1 \oplus_2 1 = 0$$

et on définit la structure \mathbf{M}_3 de domaine $\mathbb{N}_{/\equiv_2}$ comme suit :

$$\begin{array}{lll} k_\varepsilon^{\mathbf{M}_3} = 0 & \text{cons}_0^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{N}_{/\equiv_2} \rightarrow \mathbb{N}_{/\equiv_2} & \text{cons}_1^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{N}_{/\equiv_2} \rightarrow \mathbb{N}_{/\equiv_2} \\ & \text{cons}_0^{\mathbf{M}_3}(n) = n & \text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(n) = 1 \oplus_2 n \end{array}$$

Calculer $[t]_{v_3}^{\mathbf{M}_3}$ (pour une valuation v_3 quelconque).

5. On définit la fonction $f : A^* \rightarrow \mathbb{B}$ comme suit.

$$f(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w = \varepsilon \\ \overline{f(w')} & \text{si } w = 1w' \\ f(w') & \text{si } w = 0w' \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F}) \ [t]_{v_3}^{\mathbf{M}_3} = f([t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1})$ (on pourra remarquer que $1 \oplus_2 x = \overline{x}$).

Corrigé de l'examen 1ère session du 16/12/2016

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

(1). Une formule F de la logique des propositions est satisfiable si et seulement si il existe une interprétation \mathbf{I} telle que $[F]^{\mathbf{I}} = 1$.

- (2).
- | | |
|--------------------|---|
| | $\neg F$ est non satisfiable |
| si et seulement si | il n'existe pas une interprétation \mathbf{I} telle que $[\neg F]^{\mathbf{I}} = 1$ |
| si et seulement si | pour toute interprétation \mathbf{I} , $[\neg F]^{\mathbf{I}} = 0$ |
| si et seulement si | pour toute interprétation \mathbf{I} , $[F]^{\mathbf{I}} = 0$ |
| si et seulement si | pour toute interprétation \mathbf{I} , $[F]^{\mathbf{I}} = 1$ |
| si et seulement si | F est valide |

(3).(a). Puisque F une formule non satisfiable, l'ensemble des interprétations \mathbf{I} telles que $[F]^{\mathbf{I}} = 1$ est vide et on a donc bien $F \models G$. (b). $G \models F$ n'est pas vérifié lorsque G est une formule satisfiable puisque dans ce cas il existe au moins une interprétation \mathbf{I} telle que $[G]^{\mathbf{I}} = 1$ mais $[F]^{\mathbf{I}} = 0$ puisque F est insatisfiable. (c). Puisque F est non satisfiable, $\neg F$ est valide et lorsque G n'est pas valide, il existe une interprétation \mathbf{I} telle que $[G]^{\mathbf{I}} = 0$ mais $[\neg F]^{\mathbf{I}} = 1$ et donc $\neg F \models G$ n'est pas vérifié. (d). Puisque F est non satisfiable, $\neg F$ est valide et donc $G \models \neg F$ est vérifié puisque pour toute interprétation \mathbf{I} , on a $[\neg F]^{\mathbf{I}} = 1$.

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

(1). Calcul de l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{I}}$:

$$\begin{aligned}
 [F]^{\mathbf{I}} &= [p \Rightarrow \neg p]^{\mathbf{I}} + [\neg p \Rightarrow p]^{\mathbf{I}} = ([p]^{\mathbf{I}} + [\neg p]^{\mathbf{I}}) + ([\neg p]^{\mathbf{I}} + [p]^{\mathbf{I}}) = ([p]^{\mathbf{I}} + \overline{[p]^{\mathbf{I}}}) + (\overline{[p]^{\mathbf{I}}} + [p]^{\mathbf{I}}) \\
 &= (\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(p)) + (\mathbf{I}(p) + \overline{\mathbf{I}(p)})
 \end{aligned}$$

(2). On montre par un raisonnement équationnel que $[F]^{\mathbf{I}} \equiv 1$:

$$\begin{aligned}
 [F]^{\mathbf{I}} &= (\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(p)) + (\mathbf{I}(p) + \overline{\mathbf{I}(p)}) \\
 &\stackrel{(E1.2)}{\equiv} (\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(p)) + (\mathbf{I}(p) + \mathbf{I}(p)) \stackrel{(E3.5) \times 2}{\equiv} \overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(p) \stackrel{(E3.1)}{\equiv} \mathbf{I}(p) + \overline{\mathbf{I}(p)} \stackrel{(E1.4)}{\equiv} 1
 \end{aligned}$$

(3).

⟨1⟩	montrons $(p \Rightarrow \neg p) \vee (\neg p \Rightarrow p)$
⟨2⟩	montrons $p \vee \neg p$
⟨2⟩	CQFD (TE)
⟨3⟩	supposons $h_1 : p$, montrons $(p \Rightarrow \neg p) \vee (\neg p \Rightarrow p)$
⟨4⟩	montrons $\neg p \Rightarrow p$
⟨5⟩	supposons $h_2 : \neg p$, montrons p c'est l'hypothèse h_1
⟨5⟩	CQFD (Ax)
⟨4⟩	CQFD (I_{\Rightarrow})
⟨3⟩	CQFD (I_{\vee}^d)
⟨4⟩	supposons $h_2 : \neg p$, montrons $(p \Rightarrow \neg p) \vee (\neg p \Rightarrow p)$
⟨5⟩	montrons $p \Rightarrow \neg p$
⟨6⟩	supposons $h_3 : p$, montrons $\neg p$ c'est l'hypothèse h_2
⟨6⟩	CQFD (Ax)
⟨5⟩	CQFD (I_{\Rightarrow})
⟨4⟩	CQFD (I_{\vee}^g)
⟨1⟩	CQFD (E_{\vee})

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

(1). (a). $F_1 = \forall x \forall y ((p(x, z) \wedge p(y, z)) \Rightarrow x = y)$

(b). $\text{Free}(F_1) = \{z\}$

(c). Clôture universelle de $F_1 : \forall z \forall x \forall y ((p(x, z) \wedge p(y, z)) \Rightarrow x = y)$

(2). (a). La formule $\forall y \exists x (p(x, y) \wedge (\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z)))$ est satisfiable puisque si l'on considère la structure \mathbf{M} telle que $p^{\mathbf{M}} = \{(a, b) \mid a = b\}$, on a :

$$\begin{aligned} & [\forall y \exists x (p(x, y) \wedge (\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z)))]_v^{\mathbf{M}} = 1 \\ \text{car } & [\exists x (p(x, y) \wedge (\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z)))]_{v[y \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}} = 1 \text{ pour chaque } m_1 \in |\mathbf{M}| \\ \text{car } & [p(x, y) \wedge (\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z))]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}} = 1 \text{ pour chaque } m_1 \in |\mathbf{M}| \\ \text{car } & [p(x, y)]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}} \cdot [\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z)]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}} = 1 \text{ pour chaque } m_1 \in |\mathbf{M}| \end{aligned}$$

En effet, d'une part $[p(x, y)]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}} = 1$ pour chaque $m_1 \in |\mathbf{M}|$ car $(m_1, m_1) \in p^{\mathbf{M}}$, et, d'autre part :

$$\begin{aligned} & [\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z)]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}} = 1 \text{ pour chaque } m_1 \in |\mathbf{M}| \\ \text{car } & [p(z, y) \Rightarrow x = z]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1][z \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}} = 1 \text{ pour chaque } m_1 \in |\mathbf{M}| \text{ et chaque } m_2 \in |\mathbf{M}| \\ \text{car } & \frac{[p(z, y)]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1][z \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}} + [x = z]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1][z \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}}}{\text{pour chaque } m_1 \in |\mathbf{M}| \text{ et chaque } m_2 \in |\mathbf{M}|} = 1 \\ \text{car } & \text{si } m_1 = m_2 \text{ alors } [x = z]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1][z \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}} = 1 \text{ car } (m_1, m_2) \in p^{\mathbf{M}} \\ & \text{et si } m_1 \neq m_2 \text{ alors } [p(z, y)]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1][z \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}} = \bar{0} = 1 \text{ car } (m_1, m_2) \notin p^{\mathbf{M}} \end{aligned}$$

(b). La formule $\forall y \exists x (p(x, y) \wedge (\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z)))$ n'est pas valide puisque si l'on considère la structure \mathbf{M} telle que $p^{\mathbf{M}} = \emptyset$, on a :

$$\begin{aligned} & [\forall y \exists x (p(x, y) \wedge (\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z)))]_v^{\mathbf{M}} = 0 \\ \text{car } & [\exists x (p(x, y) \wedge (\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z)))]_{v[y \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}} = 0 \text{ pour un élément } m_1 \in |\mathbf{M}| \\ \text{car } & [p(x, y) \wedge (\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z))]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}} = 0 \text{ pour un élément } m_1 \in |\mathbf{M}| \\ \text{car } & [p(x, y)]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}} \cdot [\forall z (p(z, y) \Rightarrow x = z)]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}} = 0 \text{ pour un élément } m_1 \in |\mathbf{M}| \\ \text{car } & [p(x, y)]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}} = 0 \text{ pour un élément } m_1 \in |\mathbf{M}| \\ \text{car } & (m_1, m_1) \notin p^{\mathbf{M}} = \emptyset \end{aligned}$$

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.

⟨1⟩	montrons $(\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
⟨2⟩	supposons $h_1 : \neg A \vee B$, montrons $A \Rightarrow B$
⟨3⟩	supposons $h_2 : A$, montrons B
⟨4⟩	montrons $\neg A \vee B$ c'est l'hypothèse h_1
⟨4⟩	CQFD (Ax)
⟨5⟩	supposons $h_3 : \neg A$, montrons B
⟨6⟩	supposons $h_4 : \neg B$, montrons false
⟨7⟩	montrons $\neg A$ c'est l'hypothèse h_3
⟨7⟩	CQFD (Ax)
⟨8⟩	montrons A c'est l'hypothèse h_2
⟨8⟩	CQFD (Ax)
⟨6⟩	CQFD (E_{\neg})
⟨5⟩	CQFD (Abs)
⟨6⟩	supposons $h_4 : B$, montrons B c'est l'hypothèse h_4
⟨6⟩	CQFD (Ax)
⟨3⟩	CQFD (E_{\vee})
⟨2⟩	CQFD (I_{\Rightarrow})
⟨1⟩	CQFD (I_{\Rightarrow})

⟨1⟩	montrons $(F_1 \wedge F_2) \Rightarrow F_3$
⟨2⟩	supposons $h_1 : (F_1 \wedge F_2)$, montrons F_3
⟨3⟩	montrons $\exists x (q(x) \Rightarrow r(x))$
⟨3⟩	CQFD (D_{\wedge}^d avec h_1)
⟨4⟩	soit une nouvelle variable x_1 , supposons $h_2 : \underbrace{(q(x) \Rightarrow r(x))}_{q(x_1) \Rightarrow r(x_1)}[x := x_1]$
	montrons F_3
⟨5⟩	montrons $\underbrace{(p(x) \Rightarrow r(x))}_{p(x_1) \Rightarrow r(x_1)}[x := x_1]$
⟨6⟩	supposons $h_3 : p(x_1)$, montrons $r(x_1)$
⟨7⟩	montrons $q(x_1) \Rightarrow r(x_1)$ c'est l'hypothèse h_2
⟨7⟩	CQFD (Ax)
⟨8⟩	montrons $q(x_1)$
⟨9⟩	montrons $\underbrace{p(x_1) \Rightarrow q(x_1)}_{(p(x) \Rightarrow q(x))[x := x_1]}$
⟨10⟩	montrons $\forall x (p(x) \Rightarrow q(x))$
⟨10⟩	CQFD (D_{\wedge}^q avec h_1)
⟨9⟩	CQFD (E_{\forall})
⟨10⟩	montrons $p(x_1)$ c'est l'hypothèse h_3
⟨10⟩	CQFD (Ax)
⟨8⟩	CQFD (E_{\Rightarrow})
⟨6⟩	CQFD (E_{\Rightarrow})
⟨5⟩	CQFD (I_{\Rightarrow})
⟨4⟩	CQFD (I_{\exists})
⟨2⟩	CQFD (E_{\exists})
⟨1⟩	CQFD (I_{\Rightarrow})

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5.

(1). L'ensemble $\mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$ construit à partir de $\mathcal{F} = \{k_\epsilon, \text{cons}_0, \text{cons}_1\}$ est défini inductivement comme suit.

- (B) $k_\epsilon \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$
- (I) Si $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$, alors $\text{cons}_0(t) \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$.
- (I) Si $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$, alors $\text{cons}_1(t) \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$.

(2). $[t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1} = [\text{cons}_1(\text{cons}_1(\text{cons}_0(\text{cons}_1(k_\epsilon))))]_{v_1}^{\mathbf{M}_1} = \text{cons}_1^{\mathbf{M}_1}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_1}(\text{cons}_0^{\mathbf{M}_1}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_1}(k_\epsilon^{\mathbf{M}_1})))) = 1101$

(3). Définition de la structure \mathbf{M}_2 :

$$\begin{aligned} k_\epsilon^{\mathbf{M}_2} &= 0 & \text{cons}_0^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{B} &\rightarrow \mathbb{B} & \text{cons}_1^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{B} &\rightarrow \mathbb{B} \\ \text{cons}_0^{\mathbf{M}_2}(b) &= b & \text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(b) &= \bar{b} \end{aligned}$$

Calcul de $[t]_{v_2}^{\mathbf{M}_2}$:

$$\begin{aligned} [t]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} &= [\text{cons}_1(\text{cons}_1(\text{cons}_0(\text{cons}_1(k_\epsilon))))]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} \\ &= \text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{cons}_0^{\mathbf{M}_2}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(k_\epsilon^{\mathbf{M}_2})))) = \text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{cons}_0^{\mathbf{M}_2}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(0)))) \\ &= \text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{cons}_0^{\mathbf{M}_2}(\bar{0}))) = \text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{cons}_0^{\mathbf{M}_2}(1))) = \text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(1)) \\ &= \text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(\bar{1}) = \text{cons}_1^{\mathbf{M}_2}(0) = \bar{0} = 1 \end{aligned}$$

(4).

$$\begin{aligned} [t]_{v_3}^{\mathbf{M}_3} &= [\text{cons}_1(\text{cons}_1(\text{cons}_0(\text{cons}_1(k_\epsilon))))]_{v_3}^{\mathbf{M}_3} \\ &= \text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(\text{cons}_0^{\mathbf{M}_3}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(k_\epsilon^{\mathbf{M}_3})))) = \text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(\text{cons}_0^{\mathbf{M}_3}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(0)))) \\ &= \text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(\text{cons}_0^{\mathbf{M}_3}(1 \oplus_2 0))) = \text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(\text{cons}_0^{\mathbf{M}_3}(1))) = \text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(1)) \\ &= \text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(1 \oplus_2 1) = \text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}(0) = 1 \oplus_2 0 = 1 \end{aligned}$$

(5). Par induction sur le terme t . (B) Pour $t = k_\epsilon$, la propriété est vérifiée puisque :

$$[k_\epsilon]_{v_3}^{\mathbf{M}_3} = k_\epsilon^{\mathbf{M}_3} = 0 = f(\epsilon) = f(k_\epsilon^{\mathbf{M}_1}) = f([k_\epsilon]_{v_1}^{\mathbf{M}_1})$$

(I) Soit t un terme. Supposons $[t]_{v_3}^{\mathbf{M}_3} = f([t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1})$. On a :

$$\begin{aligned} [\text{cons}_0(t)]_{v_3}^{\mathbf{M}_3} &= \text{cons}_0^{\mathbf{M}_3}([t]_{v_3}^{\mathbf{M}_3}) = [t]_{v_3}^{\mathbf{M}_3} \stackrel{\text{hyp.ind.}}{=} f([t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) = f(0[t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) = f(\text{cons}_0^{\mathbf{M}_1}([t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1})) \\ &= f([\text{cons}_0(t)]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) \\ [\text{cons}_1(t)]_{v_3}^{\mathbf{M}_3} &= \text{cons}_1^{\mathbf{M}_3}([t]_{v_3}^{\mathbf{M}_3}) = 1 \oplus_2 [t]_{v_3}^{\mathbf{M}_3} \stackrel{\text{hyp.ind.}}{=} 1 \oplus_2 f([t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) = \overline{f([t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1})} = f(1[t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) \\ &= f(\text{cons}_1^{\mathbf{M}_1}([t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1})) = f([\text{cons}_1(t)]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) \end{aligned}$$