

Examen 1ère session du 09/01/2020

Durée 2h

Téléphones et ordinateurs interdits. Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Dédution Naturelle. Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie.

Exercice 1 (0,5+(0,5+1)+(1,5+0,5)=4 points)

On considère la formule $F = (\forall x \forall y (p(h(x)) \vee q(f(x, y), z))) \Rightarrow \exists z q(x, f(y, z))$ dans laquelle les symboles x, y et z sont des symboles de variable.

1. Donner l'ensemble $\text{Free}(F)$.
2. Proposer une clôture universelle F' de F puis renommer certains symboles de variable de F' pour obtenir une formule F'' logiquement équivalente à F' et dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents.
3. Calculer $F[x := g(x, y, z)]$ et $F'[x := g(x, y, z)]$.

Exercice 2 (3+2+3+1=9 points)

On considère un plateau carré contenant 36 cases dans lesquelles peuvent être placées des pièces qui sont soit rondes soit carrées. Chaque case est désignée par ses coordonnées (ℓ, c) (désignant respectivement un numéro de ligne et un numéro de colonne) et contient au plus une pièce. Une pièce est représentée par un tuple (p, ℓ, c) où $p \in \{\square, \circ\}$ désigne la forme de la pièce, ℓ le numéro de ligne et c le numéro de colonne où se trouve la pièce. On peut représenter un plateau P par l'ensemble des pièces qu'il contient.

Voici un exemple de plateau noté P_{ex} (les coordonnées de chaque case figurent en bas des cases).

(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)
\square	\circ				
(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
	\circ				
(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
			\square		
(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
				\circ	
(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)

$$P_{\text{ex}} = \left\{ \begin{array}{l} (\square, 4, 0), \\ (\circ, 4, 1), \\ (\circ, 3, 1), \\ (\square, 2, 3), \\ (\circ, 0, 4) \end{array} \right\}$$

Etant donné un plateau P , on définit une structure \mathbf{M}_P dont le domaine est $|\mathbf{M}_P| = P$. On considère l'ensemble de prédicats $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1 = \{\text{est_rond}, \text{est_carre}\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{\text{est_a_gauche}\}$ et tel que :

- $\text{est_rond}(x)$ signifie que la pièce x située sur le plateau est ronde
- $\text{est_carre}(x)$ signifie que la pièce x située sur le plateau est carrée
- $\text{est_a_gauche}(x, y)$ signifie que la pièce x est dans une case qui se trouve à gauche de la case contenant la pièce y : une case de coordonnées (ℓ, c) est à gauche d'une case de coordonnées (ℓ', c') lorsque $c < c'$

1. Définir les ensembles $\text{est_rond}^{\mathbf{M}_P}$, $\text{est_carre}^{\mathbf{M}_P}$ et $\text{est_a_gauche}^{\mathbf{M}_P}$ obtenus à partir d'un plateau P quelconque. Donner les éléments de ces ensembles pour le plateau P_{ex} donné en exemple.
2. On considère l'énoncé « Il existe une pièce ronde située à gauche de toutes les pièces carrées. ».

- Proposer une formule F permettant d'exprimer cet énoncé.
- Montrer que $[F]_v^{\mathbf{M}_{\text{Pex}}} = 0$ (pour toute valuation v).
- Proposer un plateau P_{new} tel que $[F]_v^{\mathbf{M}_{P_{\text{new}}}} = 1$ (pour toute valuation v).

Exercice 3 (0,5+0,5+0,5+4,5=6 points)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_0 = \{Z\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{S\}$.

- Particulariser la définition de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \{Z, S\}$.
- Soit \oplus une fonction sur les paires de termes définie par :

$$\oplus : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \times \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \quad \oplus(t_1, t_2) = \begin{cases} t_2 & \text{si } t_1 = Z \\ S(\oplus(t, t_2)) & \text{si } t_1 = S(t) \end{cases}$$

Calculer $\oplus(S(S(Z)), S(Z))$.

- Soit \mathbf{M} une structure dont le domaine est l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels et telle que :

$$Z^{\mathbf{M}} = 0 \quad \begin{array}{l} S^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ S^{\mathbf{M}}(n) = n + 1 \end{array}$$

- Calculer $[\oplus(S(S(Z)), S(Z))]^{\mathbf{M}}$.
- Montrer par induction sur t_1 , que pour tous termes t_1 et t_2 , $[\oplus(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}} = [t_1]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}}$.

Exercice 4 (10+12=22 points)

En utilisant les règles de la déduction naturelle (et les règles dérivées du formulaire), prouver les formules :

$$(A \vee \neg(B \vee C)) \Rightarrow (\neg C \vee A) \quad \forall x ((\exists y \forall z p(x, y, z)) \Rightarrow \exists z p(x, z, z))$$

Exercice 5 (4+5=9 points)

On considère un langage logique comprenant le symbole de prédicat d'égalité d'arité 2 noté eq et on ajoute aux règles de la déduction naturelle les deux règles suivantes permettant de raisonner sur des formules contenant ce prédicat.

$\begin{array}{l} \langle i \rangle \quad \text{supposons } h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n \\ \quad \text{montrons } eq(t, t) \\ \langle i \rangle \quad \text{CQFD } (I_{eq}) \end{array}$	$\begin{array}{l} \langle i \rangle \quad \text{supposons } h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n \\ \quad \text{montrons } F[x := t] \\ \quad \begin{array}{l} \langle i+1 \rangle \quad \text{montrons } F[x := t'] \\ \quad \dots \\ \langle i+1 \rangle \quad \text{CQFD} \end{array} \\ \\ \quad \begin{array}{l} \langle i+2 \rangle \quad \text{montrons } eq(t, t') \\ \quad \dots \\ \langle i+2 \rangle \quad \text{CQFD} \end{array} \\ \langle i \rangle \quad \text{CQFD } (E_{eq}) \end{array}$
--	---

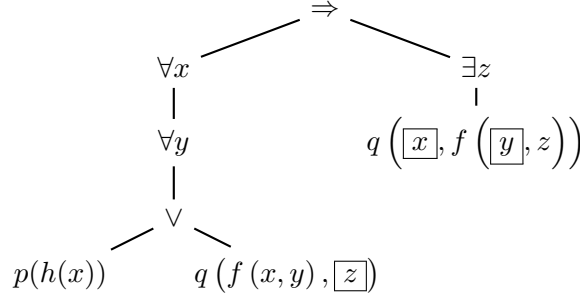
La règle I_{eq} est un axiome et énonce que la formule $eq(t, t)$ est prouvable pour tout terme t . La règle E_{eq} exprime que si l'on dispose d'une preuve de la formule $F[x := t']$ (c-à-d d'une preuve de la formule F dans laquelle x est substitué par le terme t') et d'une preuve de l'égalité $eq(t, t')$, alors on peut prouver la formule $F[x := t]$ (c-à-d la formule F dans laquelle x est substitué par le terme t). Prouver les deux formules ci-dessous exprimant que l'égalité est symétrique et transitive :

- $\forall x \forall y (eq(x, y) \Rightarrow eq(y, x))$
Indication : étant données trois variables x' , y' et w et la formule $F = eq(y', w)$, calculer $F[w := y']$ et $F[w := x']$ pour comprendre comment utiliser la règle E_{eq} .
- $\forall x \forall y \forall z ((eq(x, y) \wedge eq(y, z)) \Rightarrow eq(x, z))$
Indication : étant données trois variables x' , z' et w et la formule $F = eq(w, z')$, calculer $F[w := y']$ et $F[w := x']$ pour comprendre comment utiliser la règle E_{eq} .

Corrigé de l'examen 1ère session du 09/01/2020

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

L'arbre de syntaxe abstraite de la formule F dans lequel les occurrences libres de symboles de variable sont encadrées est :



1. $\text{Free}(F) = \{x, y, z\}$

2. $F' = \forall x \forall y \forall z F$ s'obtient en quantifiant universellement les variables de $\text{Free}(F) = \{x, y, z\}$. Pour obtenir F'' il suffit de renommer les occurrences de variable liée dans F' :

$$\forall x \forall y \forall z ((\forall x_1 \forall x_2 (p(h(x_1)) \vee q(f(x_1, x_2), z))) \Rightarrow \exists x_3 q(x, f(y, x_3)))$$

3. Puisque les symboles de variable apparaissant dans le terme $g(x, y, z)$ admettent des occurrences liées dans la formule F , on renomme ces occurrences liées et on peut par exemple considérer la formule ci dessous qui est logiquement équivalente à F :

$$((\forall x_1 \forall x_2 (p(h(x_1)) \vee q(f(x_1, x_2), z))) \Rightarrow \exists x_3 q(x, f(y, x_3)))$$

On peut à présent appliquer la substitution pour obtenir la formule :

$$F[x := g(x, y, z)] = ((\forall x_1 \forall x_2 (p(h(x_1)) \vee q(f(x_1, x_2), z))) \Rightarrow \exists x_3 q(g(x, y, z), f(y, x_3)))$$

Par construction, la formule F' est une formule close et donc $F'[x := g(x, y, z)] = F'$.

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

1.

$$\begin{aligned} \text{est_rond}^{\mathbf{M}_P} &= \{(\bigcirc, \ell, c) \in P\} & \text{est_carre}^{\mathbf{M}_P} &= \{(\square, \ell, c) \in P\} \\ \text{est_rond}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} &= \left\{ \begin{array}{l} (\bigcirc, 4, 1), (\bigcirc, 3, 1), \\ (\bigcirc, 0, 4) \end{array} \right\} & \text{est_carre}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} &= \{(\square, 4, 0), (\square, 2, 3)\} \\ \text{est_a_gauche}^{\mathbf{M}_P} &= \{((p_1, \ell_1, c_1), (p_2, \ell_2, c_2)) \in P \times P \mid c_1 < c_2\} \\ \text{est_a_gauche}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} &= \left\{ \begin{array}{l} ((\square, 4, 0), (\bigcirc, 4, 1)), ((\square, 4, 0), (\bigcirc, 3, 1)), ((\square, 4, 0), (\square, 2, 3)), \\ ((\square, 4, 0), (\bigcirc, 0, 4)), ((\bigcirc, 4, 1), (\square, 2, 3)), ((\bigcirc, 4, 1), (\bigcirc, 0, 4)), \\ ((\bigcirc, 3, 1), (\square, 2, 3)), ((\bigcirc, 3, 1), (\bigcirc, 0, 4)), ((\square, 2, 3), (\bigcirc, 0, 4)) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

2.a. $F = \exists x (\text{est_rond}(x) \wedge (\forall y (\text{est_carre}(y) \Rightarrow \text{est_a_gauche}(x, y))))$

2.b. Pour montrer que $[F]_v^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} = 0$, il suffit de montrer :

$$\begin{aligned} & [\text{est_rond}(x) \wedge (\forall y (\text{est_carre}(y) \Rightarrow \text{est_a_gauche}(x, y)))]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} \\ &= [\text{est_rond}(x)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} \cdot [\forall y (\text{est_carre}(y) \Rightarrow \text{est_a_gauche}(x, y))]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} = 0 \end{aligned}$$

pour chaque $m \in P_{\text{ex}}$. On a :

$$\begin{aligned} [\text{est_rond}(x)]_{v[x \leftarrow (\square, 4, 0)]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} &= [\text{est_rond}(x)]_{v[x \leftarrow (\square, 2, 3)]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} = 0 \\ [\text{est_rond}(x)]_{v[x \leftarrow (\bigcirc, 4, 1)]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} &= [\text{est_rond}(x)]_{v[x \leftarrow (\bigcirc, 3, 1)]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} = [\text{est_rond}(x)]_{v[x \leftarrow (\bigcirc, 0, 4)]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} = 1 \end{aligned}$$

et puisque $0 \cdot b \equiv b \cdot 0 \equiv 0$ pour tout booléen b , il suffit alors de montrer que :

$$[\forall y (\text{est_carre}(y) \Rightarrow \text{est_a_gauche}(x, y))]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} = 0$$

pour chaque $m \in \{(\bigcirc, 4, 1), (\bigcirc, 3, 1), (\bigcirc, 0, 4)\}$. Pour chacun de ces éléments, il s'agit donc de trouver un élément $p \in P_{\text{ex}}$ tel que :

$$\begin{aligned} & \frac{[\text{est_carre}(y) \Rightarrow \text{est_a_gauche}(x, y)]_{v[x \leftarrow m][y \leftarrow p]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}}}{[\text{est_carre}(y)]_{v[x \leftarrow m][y \leftarrow p]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} + [\text{est_a_gauche}(x, y)]_{v[x \leftarrow m][y \leftarrow p]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}}} = 0 \end{aligned}$$

Pour $m = (\bigcirc, 4, 1)$, il suffit de choisir $p = (\square, 4, 0)$ car $((\bigcirc, 4, 1), (\square, 4, 0)) \notin \text{est_a_gauche}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}}$ et $(\square, 4, 0) \in \text{est_carre}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}}$.

Pour $m = (\bigcirc, 3, 1)$, il suffit de choisir $p = (\square, 4, 0)$ car $((\bigcirc, 3, 1), (\square, 4, 0)) \notin \text{est_a_gauche}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}}$ et $(\square, 4, 0) \in \text{est_carre}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}}$.

Pour $m = (\bigcirc, 0, 4)$, il suffit de choisir $p = (\square, 2, 3)$ car $((\bigcirc, 0, 4), (\square, 2, 3)) \notin \text{est_a_gauche}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}}$ et $(\square, 2, 3) \in \text{est_carre}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}}$.

En effet, dans ces trois cas on a :

$$\frac{[\text{est_carre}(y)]_{v[x \leftarrow m][y \leftarrow p]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}}}{[\text{est_carre}(y)]_{v[x \leftarrow m][y \leftarrow p]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}} + [\text{est_a_gauche}(x, y)]_{v[x \leftarrow m][y \leftarrow p]}^{\mathbf{M}_{P_{\text{ex}}}}} = \bar{1} + 0 = 0$$

2.c. Il suffit de considérer le plateau :

$$P_{\text{new}} = \{(\bigcirc, 4, 0), (\bigcirc, 4, 1), (\bigcirc, 3, 1), (\square, 2, 3), (\bigcirc, 0, 4)\}$$

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

1. Définition inductive de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$:

(B) $Z \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

(I) Si $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $S(t) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

2. $\oplus(S(S(Z)), S(Z)) = S(\oplus(S(Z), S(Z))) = S(S(\oplus(Z, S(Z)))) = S(S(S(Z)))$.

3.a. $[\oplus(S(S(Z)), S(Z))]^{\mathbf{M}} = [S(S(S(Z)))]^{\mathbf{M}} = S^{\mathbf{M}}(S^{\mathbf{M}}(S^{\mathbf{M}}([Z]^{\mathbf{M}}))) = 1 + (1 + (1 + 0)) = 3$

3.b. Par induction sur t_1 .

(B) si $t_1 = Z$, alors $[\oplus(Z, t_2)]^{\mathbf{M}} = [t_2]^{\mathbf{M}} = 0 + [t_2]^{\mathbf{M}} = [Z]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}}$.

(I) Soit $t_1 = S(t)$, supposons (par hypothèse d'induction) que $[\oplus(t, t_2)]^{\mathbf{M}} = [t]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}}$ et montrons que $[\oplus(S(t), t_2)]^{\mathbf{M}} = [S(t)]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}}$.

$$\begin{aligned} [\oplus(S(t), t_2)]^{\mathbf{M}} &= [S(\oplus(t, t_2))]^{\mathbf{M}} && \text{par définition de } \oplus \\ &= S^{\mathbf{M}}([\oplus(t, t_2)]^{\mathbf{M}}) && \text{par définition de } []^{\mathbf{M}} \\ &= S^{\mathbf{M}}([t]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}}) && \text{par hypothèse d'induction} \\ &= 1 + ([t]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}}) && \text{par définition de } S^{\mathbf{M}} \\ &= (1 + [t]^{\mathbf{M}}) + [t_2]^{\mathbf{M}} && \text{par associativité de l'addition} \\ &= S^{\mathbf{M}}([t]^{\mathbf{M}}) + [t_2]^{\mathbf{M}} && \text{par définition de } S^{\mathbf{M}} \\ &= [S(t)]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}} && \text{par définition de } []^{\mathbf{M}} \end{aligned}$$

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.

⟨1⟩	montrons $(A \vee \neg(B \vee C)) \Rightarrow (\neg C \vee A)$
⟨2⟩	supposons $h_1 : A \vee \neg(B \vee C)$, montrons $\neg C \vee A$
⟨3⟩	supposons $h_2 : A$, montrons $\neg C \vee A$
⟨4⟩	montrons A
⟨4⟩	CQFD (Ax avec h_2)
⟨3⟩	CQFD (I_{\vee}^d)
⟨4⟩	supposons $h_3 : \neg(B \vee C)$, montrons $\neg C \vee A$
⟨5⟩	montrons $\neg C$
⟨6⟩	supposons $h_4 : C$, montrons false
⟨7⟩	montrons $\neg(B \vee C)$
⟨7⟩	CQFD (Ax avec h_3)
⟨8⟩	montrons $B \vee C$
⟨9⟩	montrons C
⟨9⟩	CQFD (Ax avec h_4)
⟨8⟩	CQFD (I_{\vee}^d)
⟨6⟩	CQFD (E_{\neg})
⟨5⟩	CQFD (I_{\neg})
⟨4⟩	CQFD (I_{\vee}^g)
⟨2⟩	CQFD (D_{\vee} avec h_1)
⟨1⟩	CQFD (I_{\Rightarrow})

⟨1⟩	montrons $\forall x ((\exists y \forall z p(x, y, z)) \Rightarrow \exists z p(x, z, z))$
⟨2⟩	soit une nouvelle variable x_1 , montrons $(\exists y \forall z p(x_1, y, z)) \Rightarrow \exists z p(x_1, z, z)$
⟨3⟩	supposons $h_1 : \exists y \forall z p(x_1, y, z)$, montrons $\exists z p(x_1, z, z)$
⟨4⟩	soit une nouvelle variable y_1
	supposons $h_2 : \forall z p(x_1, y_1, z)$, montrons $\exists z p(x_1, z, z)$
⟨5⟩	montrons $p(x_1, y_1, y_1)$
⟨5⟩	CQFD (D_{\forall} avec h_2)
⟨4⟩	CQFD (I_{\exists})
⟨3⟩	CQFD (D_{\exists} avec h_1)
⟨2⟩	CQFD (I_{\Rightarrow})
⟨1⟩	CQFD (I_{\forall})

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5.

1. On a $eq(y', w)[w := y'] = eq(y', y')$ et $eq(y', w)[w := x'] = eq(y', x')$.

⟨1⟩	montrons $\forall x \forall y (eq(x, y) \Rightarrow eq(y, x))$
⟨2⟩	soit une nouvelle variable x' , montrons $\forall y (eq(x', y) \Rightarrow eq(y, x'))$
⟨3⟩	soit une nouvelle variable y' , montrons $eq(x', y') \Rightarrow eq(y', x')$
⟨4⟩	supposons $h : eq(x', y')$, montrons $\underbrace{eq(y', x')}_{eq(y', w)[w := x']}$
⟨5⟩	montrons $\underbrace{eq(y', y')}_{eq(y', w)[w := y']}$
⟨5⟩	CQFD (I_{eq})
⟨6⟩	montrons $eq(x', y')$
⟨6⟩	CQFD (Ax avec h)
⟨4⟩	CQFD (E_{eq})
⟨3⟩	CQFD (I_{\Rightarrow})
⟨2⟩	CQFD (I_{\forall})
⟨1⟩	CQFD (I_{\forall})

2. On a $eq(w, z')[w := y'] = eq(y', z')$ et $eq(w, z')[w := x'] = eq(x', z')$.

⟨1⟩	montrons $\forall x \forall y \forall z ((eq(x, y) \wedge eq(y, z)) \Rightarrow eq(x, z))$
⟨2⟩	soit une nouvelle variable x' , montrons $\forall y \forall z ((eq(x', y) \wedge eq(y, z)) \Rightarrow eq(x', z))$
⟨3⟩	soit une nouvelle variable y' , montrons $\forall z ((eq(x', y') \wedge eq(y', z)) \Rightarrow eq(x', z))$
⟨4⟩	soit une nouvelle variable z' , montrons $(eq(x', y') \wedge eq(y', z')) \Rightarrow eq(x', z')$
⟨5⟩	supposons $h : eq(x', y') \wedge eq(y', z')$, montrons $\underbrace{eq(x', z')}_{eq(w, z')[w:=x']}$
⟨6⟩	montrons $\underbrace{eq(y', z')}_{eq(w, z')[w:=y']}$
⟨6⟩	CQFD (D_{\wedge}^d avec h)
⟨7⟩	montrons $eq(x', y')$
⟨7⟩	CQFD (D_{\wedge}^g avec h)
⟨5⟩	CQFD (E_{eq})
⟨4⟩	CQFD (I_{\Rightarrow})
⟨3⟩	CQFD (I_{\forall})
⟨2⟩	CQFD (I_{\forall})
⟨1⟩	CQFD (I_{\forall})