

Examen 1ère session du 12/01/2021

Durée 1h30

Téléphones et ordinateurs interdits. Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Dédution Naturelle. Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie.

Exercice 1 (0,5+0,5+1+1+0,5+0,5+1=5 points)

Soit F la formule : $(\exists x (p(x, f(x)) \Rightarrow \forall x q(x))) \wedge (q(x) \vee \forall x p(f(x), x))$.

1. Dessiner l'arbre de syntaxe abstraite de la formule F .
2. On numérote les occurrences du symbole de variable x comme suit :

$$\left(\exists x \left(p(x_{(1)}, f(x_{(2)})) \Rightarrow \forall x q(x_{(3)}) \right) \right) \wedge \left(q(x_{(4)}) \vee \forall x p(f(x_{(5)}), x_{(6)}) \right)$$

Indiquer pour chacune des six occurrences de x s'il s'agit d'une occurrence quantifiée universellement, d'une occurrence quantifiée existentiellement ou d'une occurrence libre.

3. Calculer $F[x := h(z, w)]$. On note $F_1 = F[x := h(z, w)]$ cette formule.
4. Soit $F_2 = \forall z F_1$. Calculer $F_2[w := g(x, z, w)]$. On note $F_3 = F_2[w := g(x, z, w)]$ cette formule.
5. Déterminer $\text{Free}(F_3)$.
6. Déterminer une clôture universelle de F_3 .
7. Donner une formule logiquement équivalente à F_3 telle que chaque quantificateur porte sur un symbole de variable différent qui n'admet aucune occurrence libre dans la formule.

Exercice 2 (0,5+(0,5+5)=6 points)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{k\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f\}$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$.

On note $f^0(k) = k$ et $f^{p+1}(k) = f(f^p(k))$. On définit une structure \mathbf{M} dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels comme suit :

$$k^{\mathbf{M}} = (1, 1) \quad \begin{aligned} f^{\mathbf{M}} : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) &\rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ f^{\mathbf{M}}((n_1, n_2)) &= (n_1 + 1, n_1 \times n_2) \end{aligned}$$

2. Calculer $[f^3(k)]^{\mathbf{M}}$.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $[f^n(k)]^{\mathbf{M}} = (n + 1, n!)$.

Exercice 3 (8+8=16 points)

Avec les règles de la déduction naturelle prouver les deux formules ci-dessous (on pourra utiliser les règles dérivées du formulaire).

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B) \quad \forall x (p(x, f(x)) \vee \exists y p(x, f(y))) \Rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$$

Exercice 4 (1+2+1=4 points)

Soit F la formule $(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)$.

1. Etant donnée une structure \mathbf{M} , calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$ (sans effectuer de simplification).

2. En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que la formule F est insatisfiable (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
3. Soit F' une formule quelconque, a-t-on $F \models F'$?

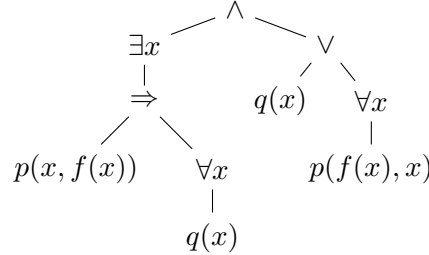
Exercice 5 ((3+3)+(0,5+1+2,5)+(1+1)=12 points)

1. Soit \mathbf{M} une structure telle que $|\mathbf{M}| = \{a, b, c\}$ et F_1 la formule $\exists x \forall y p(x, y)$.
 - (a) Proposer une interprétation $p^{\mathbf{M}}$ de p telle que $p^{\mathbf{M}}$ contienne exactement 3 éléments (c-à-d 3 paires d'éléments de $|\mathbf{M}|$) et telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$ (quelle que soit la valuation v) et montrer que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$.
 - (b) Proposer une interprétation $p^{\mathbf{M}}$ de p telle que $p^{\mathbf{M}}$ contienne exactement 3 éléments (c-à-d 3 paires d'éléments de $|\mathbf{M}|$) et telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 0$ (quelle que soit la valuation v) et montrer que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 0$.
2. Soit F_2 la formule $\exists x ((\forall y p(x, y)) \Rightarrow \exists z p(z, x))$.
 - (a) Le domaine d'interprétation d'une structure peut-il être vide ?
 - (b) Montrer que si eq désigne le prédicat d'égalité, c-à-d si $\text{eq}^{\mathbf{M}} = \{(k, k) \mid k \in |\mathbf{M}|\}$, alors $[\exists x \text{eq}(x, x)]_v^{\mathbf{M}} = 1$ (quelle que soit la valuation v).
 - (c) Montrer que la formule F_2 est valide.
3. A-t-on $F_2 \models F_1$? $F_1 \models F_2$? Justifier vos réponses.

Corrigé de l'examen 1ère session du 12/01/2021

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

1. Arbre de syntaxe abstraite de la formule $F = (\exists x (p(x, f(x)) \Rightarrow \forall x q(x))) \wedge (q(x) \vee \forall x p(f(x), x))$:



2. $(\exists x (p(x_{(1)}, f(x_{(2)})) \Rightarrow \forall x q(x_{(3)}))) \wedge (q(x_{(4)}) \vee \forall x p(f(x_{(5)}), x_{(6)}))$

(1) et (2) sont quantifiées existentiellement ; (3), (5) et (6) sont quantifiées universellement et (4) est libre.

3. Seule l'occurrence libre de x dans F est substituée par $h(z, w)$:

$$F_1 = F[x := h(z, w)] = (\exists x (p(x, f(x)) \Rightarrow \forall x q(x))) \wedge (q(h(z, w)) \vee \forall x p(f(x), x))$$

4. Pour substituer w par $g(x, z, w)$ dans la formule :

$$F_2 = \forall z F_1 = \forall z ((\exists x (p(x, f(x)) \Rightarrow \forall x q(x))) \wedge (q(h(z, w)) \vee \forall x p(f(x), x)))$$

il faut tout d'abord renommer (dans cette formule F_2) la variable quantifiée z (en z_1 par exemple) puisqu'elle apparaît dans le terme $g(x, z, w)$. On obtient alors la formule :

$$F_3 = F_2[w := g(x, z, w)] = \forall z_1 ((\exists x (p(x, f(x)) \Rightarrow \forall x q(x))) \wedge (q(h(z_1, g(x, z, w))) \vee \forall x p(f(x), x)))$$

5. $\text{Free}(F_3) = \{x, z, w\}$

6. Clôture universelle de F_3 : $\forall z \forall w \forall x F_3$

7. Il suffit de renommer les variables liées par des symboles distincts qui n'admettent pas d'occurrence libre dans la formule :

$$\forall z_1 ((\exists x_1 (p(x_1, f(x_1)) \Rightarrow \forall x_2 q(x_2))) \wedge (q(h(z_1, g(x, z, w))) \vee \forall x_3 p(f(x_3), x_3)))$$

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

1. Définition inductive de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$:

$k \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

Si $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $f(t) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

2. $[f^3(k)]^{\mathbf{M}} = [f(f(f(k)))]^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(k^{\mathbf{M}}))) = f^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}((1, 1)))) = f^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}((2, 1))) = f^{\mathbf{M}}((3, 2)) = (4, 6)$

3. Raisonnement par récurrence sur n .

(B) Si $n = 0$, alors $[f^0(k)]^{\mathbf{M}} = [k]^{\mathbf{M}} = k^{\mathbf{M}} = (1, 1) = (0 + 1, 0!)$.

$$\begin{aligned} [f^{n+1}(k)]^{\mathbf{M}} &= [f(f^n(k))]^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}([f^n(k)]^{\mathbf{M}}) \\ &= f^{\mathbf{M}}(n+1, n!) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= ((n+1)+1, (n+1) \times n!) = ((n+1)+1, (n+1)!) \end{aligned}$$

<p>⟨1⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$</p>																			
<p>⟨2⟩ supposons $h_1 : \neg(A \Rightarrow B)$, montrons $A \wedge \neg B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨3⟩ montrons A</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨4⟩ supposons $h_2 : \neg A$, montrons false</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p> </td> </tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨6⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨4⟩ CQFD (E_{\neg})</p> </td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨3⟩ CQFD (Abs)</p> </td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨4⟩ montrons $\neg B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ supposons $h_2 : B$, montrons false</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p> </td> </tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨7⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ CQFD (E_{\neg})</p> </td> </tr> </table> <p>⟨4⟩ CQFD (I_{\neg})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨2⟩ CQFD (I_{\wedge})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨1⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> </table> </td></tr></table>	<p>⟨3⟩ montrons A</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨4⟩ supposons $h_2 : \neg A$, montrons false</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p> </td> </tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨6⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨4⟩ CQFD (E_{\neg})</p> </td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨3⟩ CQFD (Abs)</p> </td> </tr> </table>	<p>⟨4⟩ supposons $h_2 : \neg A$, montrons false</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p> </td> </tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨6⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨4⟩ CQFD (E_{\neg})</p> </td> </tr> </table>	<p>⟨5⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p>	<p>⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p>	<p>⟨6⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨6⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p>	<p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p>	<p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p>	<p>⟨4⟩ CQFD (E_{\neg})</p>	<p>⟨3⟩ CQFD (Abs)</p>	<p>⟨4⟩ montrons $\neg B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ supposons $h_2 : B$, montrons false</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p> </td> </tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨7⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ CQFD (E_{\neg})</p> </td> </tr> </table> <p>⟨4⟩ CQFD (I_{\neg})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨2⟩ CQFD (I_{\wedge})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨1⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> </table>	<p>⟨5⟩ supposons $h_2 : B$, montrons false</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p> </td> </tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨7⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ CQFD (E_{\neg})</p> </td> </tr> </table> <p>⟨4⟩ CQFD (I_{\neg})</p>	<p>⟨6⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p>	<p>⟨6⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p>	<p>⟨7⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨7⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p>	<p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p>	<p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p>	<p>⟨5⟩ CQFD (E_{\neg})</p>	<p>⟨2⟩ CQFD (I_{\wedge})</p>	<p>⟨1⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p>
<p>⟨3⟩ montrons A</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨4⟩ supposons $h_2 : \neg A$, montrons false</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p> </td> </tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨6⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨4⟩ CQFD (E_{\neg})</p> </td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨3⟩ CQFD (Abs)</p> </td> </tr> </table>	<p>⟨4⟩ supposons $h_2 : \neg A$, montrons false</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p> </td> </tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨6⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨4⟩ CQFD (E_{\neg})</p> </td> </tr> </table>	<p>⟨5⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p>	<p>⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p>	<p>⟨6⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨6⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p>	<p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p>	<p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p>	<p>⟨4⟩ CQFD (E_{\neg})</p>	<p>⟨3⟩ CQFD (Abs)</p>											
<p>⟨4⟩ supposons $h_2 : \neg A$, montrons false</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p> </td> </tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨6⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨4⟩ CQFD (E_{\neg})</p> </td> </tr> </table>	<p>⟨5⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p>	<p>⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p>	<p>⟨6⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨6⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p>	<p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p>	<p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p>	<p>⟨4⟩ CQFD (E_{\neg})</p>													
<p>⟨5⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p>																			
<p>⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p>																			
<p>⟨6⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨6⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p>	<p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p>	<p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p>																	
<p>⟨7⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p>																			
<p>⟨7⟩ CQFD (D_{\perp}^1 avec h_3, h_2)</p>																			
<p>⟨4⟩ CQFD (E_{\neg})</p>																			
<p>⟨3⟩ CQFD (Abs)</p>																			
<p>⟨4⟩ montrons $\neg B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ supposons $h_2 : B$, montrons false</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p> </td> </tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨7⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ CQFD (E_{\neg})</p> </td> </tr> </table> <p>⟨4⟩ CQFD (I_{\neg})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨2⟩ CQFD (I_{\wedge})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨1⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> </table>	<p>⟨5⟩ supposons $h_2 : B$, montrons false</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p> </td> </tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨7⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ CQFD (E_{\neg})</p> </td> </tr> </table> <p>⟨4⟩ CQFD (I_{\neg})</p>	<p>⟨6⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p>	<p>⟨6⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p>	<p>⟨7⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨7⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p>	<p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p>	<p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p>	<p>⟨5⟩ CQFD (E_{\neg})</p>	<p>⟨2⟩ CQFD (I_{\wedge})</p>	<p>⟨1⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p>										
<p>⟨5⟩ supposons $h_2 : B$, montrons false</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨6⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p> </td> </tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨7⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨7⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨5⟩ CQFD (E_{\neg})</p> </td> </tr> </table> <p>⟨4⟩ CQFD (I_{\neg})</p>	<p>⟨6⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p>	<p>⟨6⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p>	<p>⟨7⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨7⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p>	<p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p>	<p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p>	<p>⟨5⟩ CQFD (E_{\neg})</p>													
<p>⟨6⟩ montrons $\neg(A \Rightarrow B)$</p>																			
<p>⟨6⟩ CQFD (Ax avec h_1)</p>																			
<p>⟨7⟩ montrons $A \Rightarrow B$</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p> </td> </tr> </table> <p>⟨7⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p>	<p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p>	<p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p>																	
<p>⟨8⟩ supposons $h_3 : A$, montrons B</p>																			
<p>⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_2)</p>																			
<p>⟨5⟩ CQFD (E_{\neg})</p>																			
<p>⟨2⟩ CQFD (I_{\wedge})</p>																			
<p>⟨1⟩ CQFD (I_{\Rightarrow})</p>																			

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.

$$1. \quad \begin{aligned} [F]^{\mathbf{M}} &= [A \Rightarrow B]^{\mathbf{M}} \cdot [A \wedge \neg B]^{\mathbf{M}} = \left(\overline{[A]^{\mathbf{M}}} + [B]^{\mathbf{M}} \right) \cdot ([A]^{\mathbf{M}} \cdot [\neg B]^{\mathbf{M}}) \\ &= \left(\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B) \right) \cdot \left(\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)} \right) \end{aligned}$$

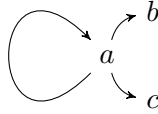
2. Pour montrer que F est insatisfiable il suffit de montrer que $[F]^{\mathbf{M}} = 0$. En effet, en posant $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) = x$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B) = y$, on a :

$$\begin{aligned} [F]^{\mathbf{M}} &= (\bar{x} + y) \cdot (x \cdot \bar{y}) \stackrel{E2.1}{=} (x \cdot \bar{y}) \cdot (\bar{x} + y) \stackrel{E4.1}{=} ((x \cdot \bar{y}) \cdot \bar{x}) + ((x \cdot \bar{y}) \cdot y) \\ &\stackrel{E2.1(\times 3)}{=} ((\bar{y} \cdot x) \cdot \bar{x}) + (y \cdot (\bar{y} \cdot x)) \stackrel{E2.4(\times 2)}{=} (\bar{y} \cdot (x \cdot \bar{x})) + ((y \cdot \bar{y}) \cdot x) \stackrel{E1.3(\times 2)}{=} (\bar{y} \cdot 0) + (0 \cdot x) \\ &\stackrel{E2.3+E2.7}{=} 0 + 0 \stackrel{E3.2}{=} 0 \end{aligned}$$

3. On a $\{\mathbf{M} \mid [F]^{\mathbf{M}} = 1\} = \emptyset \subseteq \{\mathbf{M} \mid [F']^{\mathbf{M}} = 1\}$ et donc $F \models F'$.

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5.

1.a. On considère l'interprétation $p^{\mathbf{M}} = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}$ qui peut être représentée par le graphe :



On a alors $[p(x, y)]_{v[x \leftarrow a][y \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} = 1$, $[p(x, y)]_{v[x \leftarrow a][y \leftarrow b]}^{\mathbf{M}} = 1$ et $[p(x, y)]_{v[x \leftarrow a][y \leftarrow c]}^{\mathbf{M}} = 1$ et donc pour tout $m \in |\mathbf{M}|$, $[p(x, y)]_{v[x \leftarrow a][y \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 1$ et donc $[\forall y p(x, y)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} = 1$ ce qui permet d'obtenir $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$.

1.b. On considère l'interprétation $p^{\mathbf{M}} = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$ qui peut être représentée par graphe :



Il vient $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 0$ car $[\forall y p(x, y)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 0$ pour chaque $m \in |\mathbf{M}|$. En effet pour chaque $m \in \{a, b, c\}$ on a $[\forall y p(x, y)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 0$ car $[p(x, y)]_{v[x \leftarrow m][y \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 0$ puisque :

$$([x]_{v[x \leftarrow m][y \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}, [y]_{v[x \leftarrow m][y \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}) = (m, m) \notin p^{\mathbf{M}}$$

2.a. Le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ d'une structure \mathbf{M} est un ensemble non vide.

2.b. Notons a un élément quelconque de $|\mathbf{M}|$ (cet élément existe puisque $|\mathbf{M}| \neq \emptyset$). Puisque, par définition de $\text{eq}^{\mathbf{M}}$, on a $(a, a) \in \text{eq}^{\mathbf{M}}$, et donc $([x]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}}, [x]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}}) \in \text{eq}^{\mathbf{M}}$ (où v est une valuation quelconque), on a $[\text{eq}(x, x)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} = 1$ et donc $[\exists x \text{eq}(x, x)]_v^{\mathbf{M}} = 1$.

2.c. Soit \mathbf{M} une structure quelconque, montrons que $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$ (quelle que soit la valuation v). Pour cela, par définition, en notant a un élément quelconque de $|\mathbf{M}|$ (cet élément existe puisque $|\mathbf{M}| \neq \emptyset$), il suffit de montrer que :

$$[(\forall y p(x, y)) \Rightarrow \exists z p(z, x)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} = \overline{[\forall y p(x, y)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}}} + [\exists z p(z, x)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} = 1$$

On raisonne par cas sur $[\forall y p(x, y)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}}$. Si $[\forall y p(x, y)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} = 0$ alors on peut conclure puisqu'on obtient :

$$\overline{[\forall y p(x, y)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}}} + [\exists z p(z, x)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} = \bar{0} + [\exists z p(z, x)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} = 1 + [\exists z p(z, x)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} = 1$$

Sinon, si $[\forall y p(x, y)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} = 1$, alors :

$$\begin{aligned}
& [p(x, y)]_{v[x \leftarrow a][y \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 1 && \text{pour chaque } m \in |\mathbf{M}| \\
\text{et donc } & \left([x]_{v[x \leftarrow a][y \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}, [y]_{v[x \leftarrow a][y \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} \right) = (a, m) \in p^{\mathbf{M}} && \text{pour chaque } m \in |\mathbf{M}| \\
\text{et donc } & (a, a) = \left([z]_{v[x \leftarrow a][z \leftarrow a]}^{\mathbf{M}}, [x]_{v[x \leftarrow a][z \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} \right) \in p^{\mathbf{M}} \\
\text{et donc } & [p(z, x)]_{v[x \leftarrow a][z \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} = 1 \\
\text{et donc } & [\exists z p(z, x)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} = 1
\end{aligned}$$

On obtient alors $\overline{[\forall y p(x, y)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}}} + [\exists z p(z, x)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}} = \bar{1} + 1 = 1$.

3. D'après les questions précédentes F_2 est valide et F_1 est satisfiable mais non valide. Aussi, $F_2 \not\models F_1$ puisque si l'on considère la structure \mathbf{M} de la question 1.b et une valuation quelconque v , on a $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$ car F_2 est valide alors que $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 0$. Puisque F_2 est valide on a $F_1 \models F_2$ car toutes les structures qui sont des modèles de F_1 sont nécessairement des modèles de F_2 .