

Examen 2ème session du 02/06/2017

Durée 2h

Téléphones, calculettes et ordinateurs interdits. Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Dédution Naturelle. Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie. **Conserver l'étiquette portant votre numéro d'anonymat, elle sera demandée pour toute consultation de copie.** La note (entre 0 et 80) est le minimum entre 80 et la somme des points obtenus (entre 0 et 91).

Exercice 1 (2+4+(2+2+2+2)=14 points)

- Donner la définition (mathématique) d'une formule (de la logique des propositions) valide.
- Démontrer que la formule F est satisfiable si et seulement si $\neg F$ n'est pas valide.
- Soit F une formule valide et G une formule ni valide, ni non satisfiable.
 - A-t-on $F \models G$? (Justifier)
 - A-t-on $G \models F$? (Justifier)
 - A-t-on $\neg F \models G$? (Justifier)
 - A-t-on $G \models \neg F$? (Justifier)

Exercice 2 (4+4+10=18 points)

On considère la formule $F = (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow \neg q)$.

- Etant donnée une interprétation \mathbf{I} , calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{I}}$ en fonction de $\mathbf{I}(p)$ et $\mathbf{I}(q)$ (sans effectuer de simplifications).
- A l'aide d'un raisonnement équationnel, en indiquant le nom de l'équivalence utilisée à chaque étape, montrer que la formule F est valide.
- En utilisant les règles de la Dédution Naturelle du formulaire, prouver la formule F . Il pourra être judicieux d'utiliser la règle du Tiers Exclu pour obtenir une preuve dont la structure est donnée ci-dessous.

$\langle 1 \rangle$	montrons $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow \neg q)$
$\langle 2 \rangle$	montrons $q \vee \neg q$
$\langle 2 \rangle$	CQFD (TE)
\vdots	
$\langle 1 \rangle$	CQFD (E_{\vee})

Exercice 3 ((3+2+2)+(5+5)=17 points)

- On considère le symbole de prédicat p d'arité 2 tel que $p(x_1, x_2)$ signifie " x_1 est un triangle équilatéral de hauteur x_2 ".
 - Exprimer par une formule F_1 de la logique du premier ordre la propriété : "*il existe un unique triangle équilatéral dont la hauteur est z* " (où z est un symbole de variable). On pourra utiliser le prédicat $=$ d'arité 2 pour exprimer l'égalité.
 - Déterminer l'ensemble $\text{Free}(F_1)$ des variables qui admettent au moins une occurrence libre dans la formule F_1 .
 - Déterminer la clôture universelle de F_1 .
- On considère la formule $F_2 = \forall x \forall y (q(x, y) \Rightarrow \exists z (q(x, z) \wedge q(z, y)))$
 - La formule F_2 est-elle satisfiable ? Si oui définir une structure dans laquelle la formule est vraie en justifiant pourquoi elle est vraie, si non prouver que la formule n'est pas satisfiable.
 - La formule F_2 est-elle valide ? Si oui en donner une preuve, si non définir une structure dans laquelle la formule est fausse en justifiant pourquoi elle est fausse.

Exercice 4 (10+10=20 points)

En utilisant les règles de la Dédution Naturelle, prouver les deux formules ci-dessous.

1. $(\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
2. $(F_1 \wedge F_2) \Rightarrow F_3$ où $F_1 = \exists x (p(x) \Rightarrow q(x))$, $F_2 = \forall x (q(x) \Rightarrow r(x))$ et $F_3 = \exists x (p(x) \Rightarrow r(x))$

Exercice 5 (2+2+6+(4+8)=22 points)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{k_\varepsilon\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{\text{endby}_0, \text{endby}_1\}$ (c-à-d k_ε est un symbole de constante et endby_0 et endby_1 sont des symboles de fonction d'arité 1). On définit le terme $t_{ex} = \text{endby}_1(\text{endby}_0(\text{endby}_1(\text{endby}_1(k_\varepsilon))))$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \{k_\varepsilon, \text{endby}_0, \text{endby}_1\}$.
2. On considère l'alphabet $A = \{0, 1\}$ et on définit la structure \mathbf{M}_1 de domaine A^* (où A^* est l'ensemble des mots de longueur finie constitués à partir des lettres 0 et 1) comme suit.

$$\begin{array}{lll} k_\varepsilon^{\mathbf{M}_1} = \varepsilon & \text{endby}_0^{\mathbf{M}_1} : A^* \rightarrow A^* & \text{endby}_1^{\mathbf{M}_1} : A^* \rightarrow A^* \\ (\text{mot vide de longueur } 0) & \text{endby}_0^{\mathbf{M}_1}(w) = w0 & \text{endby}_1^{\mathbf{M}_1}(w) = w1 \end{array}$$

où $w0$ (resp. $w1$) est le mot obtenu en ajoutant la lettre 0 (resp. 1) à la fin du mot w . Calculer $[t_{ex}]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}$ (pour une valuation v_1 quelconque).

3. Chaque mot de A^* (avec $A = \{0, 1\}$) correspond à la représentation binaire d'un nombre entier naturel : on définit la fonction $f : A^* \rightarrow \mathbb{N}$ permettant de calculer cet entier comme suit :

$$f(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w = \varepsilon \\ 2f(w') & \text{si } w = w'0 \\ 2f(w') + 1 & \text{si } w = w'1 \end{cases}$$

Définir une structure \mathbf{M}_2 dont le domaine est l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels et telle que pour tout terme $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$ (et toutes valuations v_1, v_2), $[t]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} = f([t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1})$. On ne demande aucune démonstration dans cette question.

Calculer $[t_{ex}]_{v_2}^{\mathbf{M}_2}$ (pour une valuation v_2 quelconque).

4. On définit la fonction $g : A^* \rightarrow A^*$ comme suit.

$$g(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w = \varepsilon \\ w'1 & \text{si } w = w'0 \\ g(w')0 & \text{si } w = w'1 \end{cases}$$

- (a) Calculer $g([t_{ex}]_{v_1}^{\mathbf{M}_1})$ et $f(g([t_{ex}]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}))$.
- (b) Démontrer par induction que pour tout terme $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$, $f(g([t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1})) = f([t]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) + 1$.

Corrigé de l'examen 2ème session du 02/06/2017

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

(1). Une formule F de la logique des propositions est valide si et seulement si $[F]^{\mathbf{I}} = 1$ pour toute interprétation \mathbf{I} .

- (2).
- | | |
|--------------------|---|
| | F est satisfiable |
| si et seulement si | il existe une interprétation \mathbf{I} telle que $[F]^{\mathbf{I}} = 1$ |
| si et seulement si | il existe une interprétation \mathbf{I} telle que $[\neg F]^{\mathbf{I}} = 0$ |
| si et seulement si | $\neg F$ n'est pas valide |

(3).(a). Puisque G n'est pas une formule valide, il existe une interprétation \mathbf{I} telle que $[G]^{\mathbf{I}} = 0$, mais puisque F est une formule valide, pour cette interprétation on a $[F]^{\mathbf{I}} = 1$, et donc $F \models G$ n'est pas vérifié. (b). Puisque F est une formule valide, $[F]^{\mathbf{I}} = 1$ pour toute interprétation \mathbf{I} , et donc en particulier $[F]^{\mathbf{I}} = 1$ pour les interprétations \mathbf{I} telles que $[G]^{\mathbf{I}} = 1$, et donc $G \models F$. (c). Puisque F est valide, $\neg F$ est non satisfiable et l'ensemble des interprétations \mathbf{I} telles que $[\neg F]^{\mathbf{I}} = 1$ est vide, et donc $\neg F \models G$. (d). Puisque G est satisfiable, il existe une interprétation \mathbf{I} telle que $[G]^{\mathbf{I}} = 1$, mais puisque F est une formule valide, pour cette interprétation on a $[F]^{\mathbf{I}} = 1$ et $[\neg F]^{\mathbf{I}} = 0$, et donc $G \models \neg F$ n'est pas vérifié.

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

(1). Calcul de l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{I}}$:

$$[F]^{\mathbf{I}} = [p \Rightarrow q]^{\mathbf{I}} + [p \Rightarrow \neg q]^{\mathbf{I}} = ([p]^{\mathbf{I}} + [q]^{\mathbf{I}}) + ([p]^{\mathbf{I}} + [\neg q]^{\mathbf{I}}) = (\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q)) + (\overline{\mathbf{I}(p)} + \overline{\mathbf{I}(q)})$$

(2). On montre par un raisonnement équationnel que $[F]^{\mathbf{I}} \equiv 1$:

$$\begin{aligned} [F]^{\mathbf{I}} &= (\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q)) + (\overline{\mathbf{I}(p)} + \overline{\mathbf{I}(q)}) \\ &\stackrel{(E3.4)}{\equiv} \overline{\mathbf{I}(p)} + (\mathbf{I}(q) + (\overline{\mathbf{I}(p)} + \overline{\mathbf{I}(q)})) \stackrel{(E3.1)}{\equiv} \overline{\mathbf{I}(p)} + (\mathbf{I}(q) + (\overline{\mathbf{I}(q)} + \overline{\mathbf{I}(p)})) \\ &\stackrel{(E3.4)}{\equiv} \overline{\mathbf{I}(p)} + ((\mathbf{I}(q) + \overline{\mathbf{I}(q)}) + \overline{\mathbf{I}(p)}) \stackrel{(E1.4)}{\equiv} \overline{\mathbf{I}(p)} + (1 + \overline{\mathbf{I}(p)}) \stackrel{(E3.3)}{\equiv} \overline{\mathbf{I}(p)} + 1 \stackrel{(E3.7)}{\equiv} 1 \end{aligned}$$

(3).

(1)	montrons $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow \neg q)$
(2)	montrons $q \vee \neg q$
(2)	CQFD (TE)
(3)	supposons $h_1 : q$, montrons $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow \neg q)$
(4)	montrons $p \Rightarrow q$
(5)	supposons $h_2 : p$, montrons q
(5)	c'est l'hypothèse h_1
(5)	CQFD (Ax)
(4)	CQFD (I_{\Rightarrow})
(3)	CQFD (I_{\vee}^q)
(4)	supposons $h_2 : \neg q$, montrons $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow \neg q)$
(5)	montrons $p \Rightarrow \neg q$
(6)	supposons $h_3 : p$, montrons $\neg q$
(6)	c'est l'hypothèse h_2
(6)	CQFD (Ax)
(5)	CQFD (I_{\Rightarrow})
(4)	CQFD (I_{\vee}^q)
(1)	CQFD (E_{\vee})

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

(1). (a). $F_1 = \exists x (p(x, z) \wedge (\forall y (p(y, z) \Rightarrow x = y)))$

(b). $\text{Free}(F_1) = \{z\}$

(c). Clôture universelle de $F_1 : \forall z \exists x (p(x, z) \wedge (\forall y (p(y, z) \Rightarrow x = y)))$

(2). (a). La formule F_2 est satisfiable puisque si l'on considère la structure \mathbf{M} dont le domaine est l'ensemble \mathbb{R} des réels et telle que $q^{\mathbf{M}} = \{(a, b) \mid a < b\}$, on a :

$$\begin{aligned} & [\forall x \forall y (q(x, y) \Rightarrow \exists z (q(x, z) \wedge q(z, y)))]_v^{\mathbf{M}} = 1 \\ \text{car } & [\forall y (q(x, y) \Rightarrow \exists z (q(x, z) \wedge q(z, y)))]_{v[x \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}} = 1 \text{ pour chaque } m_1 \in \mathbb{R} \\ \text{car } & [q(x, y) \Rightarrow \exists z (q(x, z) \wedge q(z, y))]_{v[x \leftarrow m_1][y \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}} = 1 \text{ pour chaque } m_1 \in \mathbb{R} \text{ et chaque } m_2 \in \mathbb{R} \\ \text{car } & \overline{[q(x, y)]_{v[x \leftarrow m_1][y \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}}} + [\exists z (q(x, z) \wedge q(z, y))]_{v[x \leftarrow m_1][y \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}} = 1 \\ & \text{pour chaque } m_1 \in \mathbb{R} \text{ et chaque } m_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En effet, pour chaque couple $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$, deux cas sont possibles.

Si $m_1 < m_2$ (c-à-d si $(m_1, m_2) \in q^{\mathbf{M}}$), alors $m_3 = (m_1 + m_2)/2 \in \mathbb{R}$ et est tel que $m_1 < m_3$ (c-à-d $(m_1, m_3) \in q^{\mathbf{M}}$) et $m_3 < m_2$ (c-à-d $(m_3, m_2) \in q^{\mathbf{M}}$) et on peut conclure puisque dans ce cas :

$$\begin{aligned} & [\exists z (q(x, z) \wedge q(z, y))]_{v[x \leftarrow m_1][y \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}} = 1 \\ \text{car } & [q(x, z) \wedge q(z, y)]_{v[x \leftarrow m_1][y \leftarrow m_2][z \leftarrow m_3]}^{\mathbf{M}} = 1 \\ \text{car } & [q(x, z)]_{v[x \leftarrow m_1][y \leftarrow m_2][z \leftarrow m_3]}^{\mathbf{M}} \cdot [q(z, y)]_{v[x \leftarrow m_1][y \leftarrow m_2][z \leftarrow m_3]}^{\mathbf{M}} = 1 \\ \text{car } & [q(x, z)]_{v[x \leftarrow m_1][y \leftarrow m_2][z \leftarrow m_3]}^{\mathbf{M}} = 1 \text{ et } [q(z, y)]_{v[x \leftarrow m_1][y \leftarrow m_2][z \leftarrow m_3]}^{\mathbf{M}} = 1 \\ \text{car } & (m_1, m_3) \in q^{\mathbf{M}} \text{ et } (m_3, m_2) \in q^{\mathbf{M}} \end{aligned}$$

Sinon, si $m_1 \not< m_2$ (c-à-d si $(m_1, m_2) \notin q^{\mathbf{M}}$), on peut aussi conclure puisque dans ce cas :

$$\begin{aligned} & \overline{[q(x, y)]_{v[x \leftarrow m_1][y \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}}} = 1 \\ \text{car } & [q(x, y)]_{v[x \leftarrow m_1][y \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}} = 0 \text{ puisque } (m_1, m_2) \notin q^{\mathbf{M}} \end{aligned}$$

(b). La formule F_2 n'est pas valide puisque si l'on considère la structure \mathbf{M} dont le domaine est l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels et telle que $q^{\mathbf{M}} = \{(a, b) \mid a < b\}$, on a :

$$\begin{aligned} & [\forall x \forall y (q(x, y) \Rightarrow \exists z (q(x, z) \wedge q(z, y)))]_v^{\mathbf{M}} = 0 \\ \text{car } & [\forall y (q(x, y) \Rightarrow \exists z (q(x, z) \wedge q(z, y)))]_{v[x \leftarrow 2]}^{\mathbf{M}} = 0 \\ \text{car } & [q(x, y) \Rightarrow \exists z (q(x, z) \wedge q(z, y))]_{v[x \leftarrow 2][y \leftarrow 3]}^{\mathbf{M}} = 0 \\ \text{car } & \overline{[q(x, y)]_{v[x \leftarrow 2][y \leftarrow 3]}^{\mathbf{M}}} + [\exists z (q(x, z) \wedge q(z, y))]_{v[x \leftarrow 2][y \leftarrow 3]}^{\mathbf{M}} = 0 \end{aligned}$$

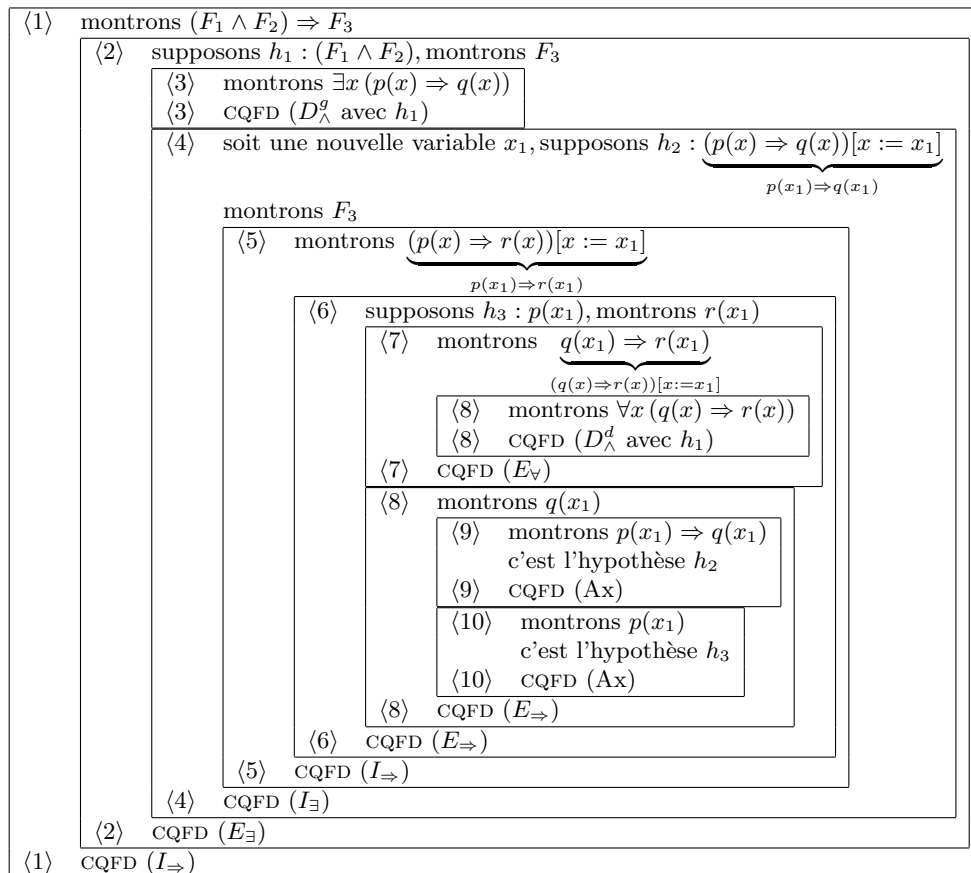
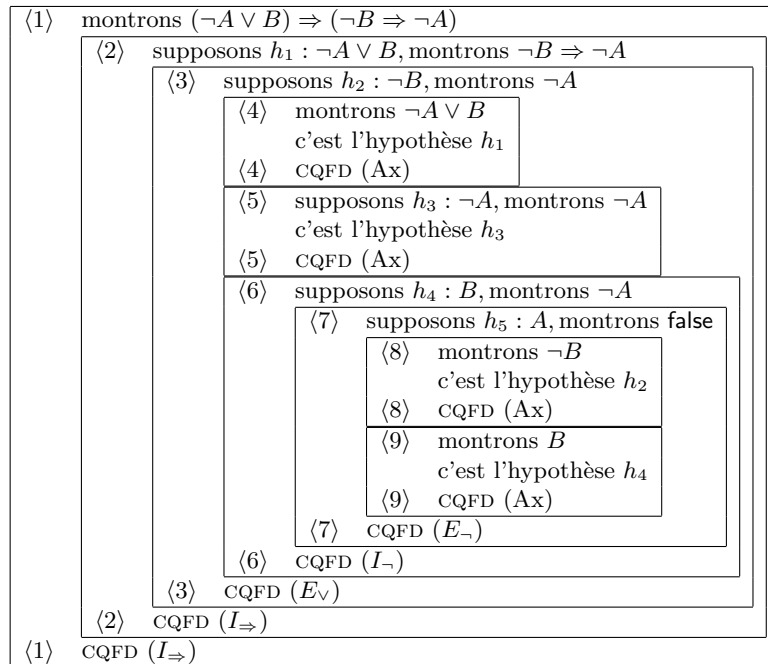
puisque d'une part :

$$\overline{[q(x, y)]_{v[x \leftarrow 2][y \leftarrow 3]}^{\mathbf{M}}} = 0 \text{ car } [q(x, y)]_{v[x \leftarrow 2][y \leftarrow 3]}^{\mathbf{M}} = 1 \text{ car } (2, 3) \in q^{\mathbf{M}} \text{ car } 2 < 3$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} & [\exists z (q(x, z) \wedge q(z, y))]_{v[x \leftarrow 2][y \leftarrow 3]}^{\mathbf{M}} = 0 \\ \text{car } & [q(x, z) \wedge q(z, y)]_{v[x \leftarrow 2][y \leftarrow 3][z \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 0 \text{ pour chaque } m \in \mathbb{N} \\ \text{car } & [q(x, z)]_{v[x \leftarrow 2][y \leftarrow 3][z \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} \cdot [q(z, y)]_{v[x \leftarrow 2][y \leftarrow 3][z \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 0 \text{ pour chaque } m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.



► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5.

(1). L'ensemble $\mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$ construit à partir de $\mathcal{F} = \{k_\varepsilon, \text{endby}_0, \text{endby}_1\}$ est défini inductivement comme suit.

- (B) $k_\varepsilon \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$
- (I) Si $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$, alors $\text{endby}_0(t) \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$.
- (I) Si $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$, alors $\text{endby}_1(t) \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$.

(2).

$$\begin{aligned} [t_{ex}]_{v_1}^{\mathbf{M}_1} &= [\text{endby}_1(\text{endby}_0(\text{endby}_1(\text{endby}_1(k_\varepsilon))))]_{v_1}^{\mathbf{M}_1} \\ &= \text{endby}_1^{\mathbf{M}_1}(\text{endby}_0^{\mathbf{M}_1}(\text{endby}_1^{\mathbf{M}_1}(\text{endby}_1^{\mathbf{M}_1}(k_\varepsilon^{\mathbf{M}_1})))) = 1101 \end{aligned}$$

(3). Définition de la structure \mathbf{M}_2 :

$$\begin{aligned} k_\varepsilon^{\mathbf{M}_2} &= 0 & \text{endby}_0^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & \text{endby}_1^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ \text{endby}_0^{\mathbf{M}_2}(n) &= 2n & \text{endby}_1^{\mathbf{M}_2}(n) &= 2n + 1 \end{aligned}$$

Calcul de $[t_{ex}]_{v_2}^{\mathbf{M}_2}$:

$$\begin{aligned} [t_{ex}]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} &= [\text{endby}_1(\text{endby}_0(\text{endby}_1(\text{endby}_1(k_\varepsilon))))]_{v_2}^{\mathbf{M}_2} \\ &= \text{endby}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{endby}_0^{\mathbf{M}_2}(\text{endby}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{endby}_1^{\mathbf{M}_2}(k_\varepsilon^{\mathbf{M}_2})))) \\ &= \text{endby}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{endby}_0^{\mathbf{M}_2}(\text{endby}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{endby}_1^{\mathbf{M}_2}(0)))) \\ &= \text{endby}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{endby}_0^{\mathbf{M}_2}(\text{endby}_1^{\mathbf{M}_2}(\underbrace{2 \times 0 + 1}_1))) \\ &= \text{endby}_1^{\mathbf{M}_2}(\text{endby}_0^{\mathbf{M}_2}(\underbrace{2 \times 1 + 1}_3)) \\ &= \text{endby}_1^{\mathbf{M}_2}(\underbrace{2 \times 3}_6) = 2 \times 6 + 1 = 13 \end{aligned}$$

(4). (a). $g([t_{ex}]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) = g(1101) = g(110)0 = 1110$ et $f(g([t_{ex}]_{v_1}^{\mathbf{M}_1})) = f(1110) = 14$.

(b). Par induction sur t . Si $t = k_\varepsilon$, alors on a bien :

$$f(g([k_\varepsilon]_{v_1}^{\mathbf{M}_1})) = f(g(\varepsilon)) = f(1) = 2f([k_\varepsilon]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) + 1 = 1 = 0 + 1 = f([k_\varepsilon]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) + 1$$

Si $t = \text{endby}_0(t')$, alors on a bien :

$$\begin{aligned} f(g([\text{endby}_0(t')]_{v_1}^{\mathbf{M}_1})) &= f(g(\text{endby}_0^{\mathbf{M}_1}([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1}))) = f(g([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1}0)) = f([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1}1) = 2f([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) + 1 \\ f([\text{endby}_0(t')]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) + 1 &= f(\text{endby}_0^{\mathbf{M}_1}([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1})) + 1 = f([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1}0) + 1 = 2f([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) + 1 \end{aligned}$$

Si $t = \text{endby}_1(t')$, alors :

$$\begin{aligned} f(g([\text{endby}_1(t')]_{v_1}^{\mathbf{M}_1})) &= f(g(\text{endby}_1^{\mathbf{M}_1}([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1}))) = f(g([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1}1)) = f(g([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1}0)) = 2f(g([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1})) \\ &= 2(f([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) + 1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ &= (2f([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) + 1) + 1 = f([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1}1) + 1 = f(\text{endby}_1^{\mathbf{M}_1}([t']_{v_1}^{\mathbf{M}_1})) + 1 \\ &= f([\text{endby}_1(t')]_{v_1}^{\mathbf{M}_1}) + 1 \end{aligned}$$