

Examen partiel du 08/11/2016
Durée 1h30

Téléphones, calculatrices et ordinateurs interdits.

Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Dédution Naturelle. Inscrire votre nom et votre numéro de groupe de TD sur votre copie. La note (entre 0 et 80) est le minimum entre 80 et la somme des points obtenus (entre 0 et 90).

Exercice 1 (2+2+(1+1)+(4+4+2+2+1)=19 points)

1. Etant données deux formules de la logique des propositions F_1 et F_2 , donner la définition mathématique de $F_1 \models F_2$.
2. Démontrer qu'une formule F de la logique des propositions est valide si, et seulement si, $\text{true} \models F$.
3. Soit p un symbole de proposition.
 - (a) A-t-on $\text{false} \models p \wedge \neg p$? (Justifier.)
 - (b) A-t-on $\text{false} \models p \vee \neg p$? (Justifier.)
4. Soit les formules $F_1 = (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ et $F_2 = (\neg p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$.
 - (a) Etant donnée une interprétation \mathbf{I} , calculer les expressions booléennes $[F_1]^\mathbf{I}$ et $[F_2]^\mathbf{I}$ en fonction de $\mathbf{I}(p)$, $\mathbf{I}(q)$ et $\mathbf{I}(r)$ (sans effectuer de simplifications).
 - (b) A l'aide d'un raisonnement équationnel, en indiquant le nom de l'équivalence utilisée à chaque étape, transformer ces expressions pour montrer que $F_1 \models F_2$.
 - (c) F_1 est-elle satisfiable ? (justifier)
 - (d) F_1 est-elle valide ? (justifier)
 - (e) A-t-on $F_1 = F_2$? (justifier)

Exercice 2 (6+10+6=22 points)

Delphine, Marinette et le chat essaient de se percher sur un perchoir. Ils font les déclarations suivantes :

Delphine : *Nous ne sommes pas perchés tous les trois ensemble.*
Marinette : *Si le chat est perché, alors Delphine est aussi perchée.*
le chat : *Si l'une des deux (Delphine ou Marinette) est perchée, alors les deux sont perchées.*

1. Exprimer par une formule de la logique des propositions les déclarations du chat, de Delphine et de Marinette en utilisant les propositions suivantes :
 p : "Delphine est perchée." q : "Marinette est perchée." r : "Le chat est perché."
2. Si l'on suppose que tous les trois disent la vérité, que peut-on en déduire ? (Justifier en utilisant la notion de conséquence sémantique.)
3. L'histoire montre que seul le chat est perché. Peut-on en déduire qui ment ? qui dit la vérité ?

Exercice 3 (2+2=4 points)

On considère la formule de la logique du premier ordre $F = (\forall x \, p(x, y, z)) \wedge (\forall y \, q(x, y, w))$.

1. Déterminer l'ensemble $\text{Free}(F)$ des variables qui ont au moins une occurrence libre dans la formule F .
2. Déterminer la clôture universelle de la formule F .

Exercice 4 (5+5+5+5=20 points)

On considère les deux formules $F_1 = \forall x \exists y p(x, y)$ et $F_2 = \exists y \forall x p(x, y)$.

1. Définir une structure \mathbf{M}_1 telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_1} = [F_2]_v^{\mathbf{M}_1} = 1$. Justifier votre réponse.
2. Définir une structure \mathbf{M}_2 telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_2} = [F_2]_v^{\mathbf{M}_2} = 0$. Justifier votre réponse.
3. Définir une structure \mathbf{M}_3 telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_3} = 1$ et $[F_2]_v^{\mathbf{M}_3} = 0$. Justifier votre réponse.
4. Existe-t-il une structure \mathbf{M}_4 telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_4} = 0$ et $[F_2]_v^{\mathbf{M}_4} = 1$? Pourquoi ?

Exercice 5 ((2+4+6)+(2+3+(4+4))=25 points)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{0\}$, $\mathcal{F}_1 = \{c\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \otimes\}$ (c-à-d 0 est un symbole de constante, c est un symbole de fonction d'arité 1, et \oplus et \otimes sont des symboles de fonction d'arité 2).

1. On considère l'ensemble $\mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$ des termes sans variables.
 - (a) Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \{0, c, \oplus, \otimes\}$.
 - (b) Définir une structure \mathbf{M}_1 dont le domaine est l'ensemble des entiers naturels $|\mathbf{M}_1| = \mathbb{N}$ telle que pour tout terme $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$, $[t]_v^{\mathbf{M}_1}$ est le nombre d'occurrences de symboles de fonction d'arité 2 dans t . Par exemple, $[\oplus(\oplus(c(0), 0), \otimes(0, c(0)))]_v^{\mathbf{M}_1} = 3$.
 - (c) Montrer que : $\forall t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F}) \quad [t]_v^{\mathbf{M}_1} + 1 = \text{nb}_0(t)$
où $\text{nb}_0 : \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction calculant le nombre d'occurrences de 0 dans un terme :

$$\text{nb}_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \text{nb}_0(t') & \text{si } t = c(t') \\ \text{nb}_0(t_1) + \text{nb}_0(t_2) & \text{si } t = \oplus(t_1, t_2) \text{ ou } t = \otimes(t_1, t_2) \end{cases}$$

2. Soit X un ensemble de symboles de variable. On considère l'ensemble $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ des termes avec variables. Soit t le terme $t = \oplus(x, \otimes(y, c(z)))$.
 - (a) Dessiner l'arbre représentant le terme t .
 - (b) On définit la structure \mathbf{M}_2 dont le domaine $|\mathbf{M}_2|$ est l'ensemble des parties $\wp(A)$ de l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Chaque élément $m \in |\mathbf{M}_2|$ est donc un sous-ensemble de l'ensemble A . Les symboles de \mathcal{F} sont interprétés comme suit :

$$\begin{aligned} 0^{\mathbf{M}_2} &= \emptyset \in |\mathbf{M}_2| & c^{\mathbf{M}_2} : |\mathbf{M}_2| &\rightarrow |\mathbf{M}_2| \\ (\text{ensemble vide}) & & c^{\mathbf{M}_2}(E) &= \overline{E} = A \setminus E = \{e \in A \mid e \notin E\} \\ & & & (\text{complémentaire de } E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oplus^{\mathbf{M}_2} : |\mathbf{M}_2| \times |\mathbf{M}_2| &\rightarrow |\mathbf{M}_2| & \otimes^{\mathbf{M}_2} : |\mathbf{M}_2| \times |\mathbf{M}_2| &\rightarrow |\mathbf{M}_2| \\ \oplus^{\mathbf{M}_2}(E_1, E_2) &= E_1 \cup E_2 & \otimes^{\mathbf{M}_2}(E_1, E_2) &= E_1 \cap E_2 \\ (\text{union}) & & (\text{intersection}) & \end{aligned}$$

$$\text{Exemples : } \begin{cases} c^{\mathbf{M}_2}(\{1, 3, 6\}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 3, 6\} = \{2, 4, 5, 7\} \\ \oplus^{\mathbf{M}_2}(\{1, 2, 4, 7\}, \{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, 4, 7\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 7\} \\ \otimes^{\mathbf{M}_2}(\{1, 2, 4, 7\}, \{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, 4, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 4\} \end{cases}$$

On considère la valuation $v_1 : X \rightarrow |\mathbf{M}_2|$ telle que $v_1(x) = \{5, 6, 7\}$, $v_1(y) = \emptyset$ et $v_1(z) = \{4\}$. Calculer $[t]_{v_1}^{\mathbf{M}_2}$.

- (c) On considère à présent l'ensemble de symboles de prédicat $\mathcal{P} = \{\text{eq}\}$ contenant un unique élément eq correspondant au prédicat d'arité 2 d'égalité dont l'interprétation est définie par $\text{eq}^{\mathbf{M}_2} = \{(E_1, E_2) \mid E_1 = E_2 \subseteq A\}$.
 - i. Soit F_1 la formule $\exists z \text{eq}(x, \oplus(y, z))$. Quelle propriété sur $v(x)$ et $v(y)$ doit être vérifiée pour que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_2} = 1$?
 - ii. Soit F_2 la formule $\forall x \forall y (F_1 \Rightarrow \text{eq}(\otimes(y, c(x)), 0))$. Calculer $[F_2]_v^{\mathbf{M}_2}$.

Corrigé de l'examen partiel du 08/11/2016

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

- (1). $F_1 \models F_2$ si, et seulement si, pour toute interprétation \mathbf{I} , $[F_1]^{\mathbf{I}} = [F_2]^{\mathbf{I}}$.
- (2). On a : $\text{true} \models F$ ssi pour toute interprétation \mathbf{I} , $[\text{true}]^{\mathbf{I}} = [F]^{\mathbf{I}}$
ssi pour toute interprétation \mathbf{I} , $1 = [F]^{\mathbf{I}}$
ssi F est valide
- (3). (a). Oui car $p \wedge \neg p$ est insatisfiable et donc $[\text{false}]^{\mathbf{I}} = [p \wedge \neg p]^{\mathbf{I}} = 0$ pour toute interprétation \mathbf{I} .
- (b). Non car $p \vee \neg p$ est valide et donc $[\text{false}]^{\mathbf{I}} = 0 \neq 1 = [p \vee \neg p]^{\mathbf{I}}$.
- (4). (a). $[F_1]^{\mathbf{I}} = \overline{[p \Rightarrow q]^{\mathbf{I}}} + [r]^{\mathbf{I}} = \overline{[p]^{\mathbf{I}} + [q]^{\mathbf{I}}} + [r]^{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q) + \mathbf{I}(r)$
 $[F_2]^{\mathbf{I}} = [\neg p \Rightarrow r]^{\mathbf{I}} \cdot [q \Rightarrow r]^{\mathbf{I}} = (\overline{[\neg p]^{\mathbf{I}}} + [r]^{\mathbf{I}}) \cdot (\overline{[q]^{\mathbf{I}}} + [r]^{\mathbf{I}}) = (\overline{[p]^{\mathbf{I}} + [r]^{\mathbf{I}}}) \cdot (\overline{[q]^{\mathbf{I}} + [r]^{\mathbf{I}}})$
 $= (\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(r)) \cdot (\overline{\mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(r))$
- (b). $[F_1]^{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q) + \mathbf{I}(r)$ $[F_2]^{\mathbf{I}} = (\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(r)) \cdot (\overline{\mathbf{I}(q)} + \mathbf{I}(r))$
 $\equiv (\overline{\mathbf{I}(p)} \cdot \overline{\mathbf{I}(q)}) + \mathbf{I}(r)$ (E4.4) $\equiv (\mathbf{I}(p) + \mathbf{I}(r)) \cdot (\mathbf{I}(q) + \mathbf{I}(r))$ (E1.2)
 $\equiv (\mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q)) + \mathbf{I}(r)$ (E1.2) $\equiv (\mathbf{I}(r) + \mathbf{I}(p)) \cdot (\mathbf{I}(r) + \mathbf{I}(q))$ (E3.1) $\times 2$
 $\equiv \mathbf{I}(r) + (\mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q))$ (E4.2)
 $\equiv (\mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q)) + \mathbf{I}(r)$ (E3.1)

On a donc bien $[F_1]^{\mathbf{I}} = [F_2]^{\mathbf{I}}$ pour toute interprétation \mathbf{I} ce qui permet d'établir $F_1 \models F_2$.

(c). La formule F_1 est satisfiable puisque pour toute interprétation \mathbf{I} telle que $\mathbf{I}(r) = 1$ on a :

$$[F_1]^{\mathbf{I}} \equiv (\mathbf{I}(p) \cdot \overline{\mathbf{I}(q)}) + 1 \stackrel{(E3.7)}{=} 1$$

(d). La formule F_1 n'est pas valide car pour une interprétation \mathbf{I} telle que $\mathbf{I}(p) = 0$, $\mathbf{I}(q) = 1$ et $\mathbf{I}(r) = 0$, on a :

$$[F_1]^{\mathbf{I}} \equiv (0 \cdot 1) + 0 \stackrel{(E3.6)}{=} 0 \stackrel{(E2.3)}{=} 0$$

(e). Non les deux formules sont syntaxiquement différentes et donc $F_1 \neq F_2$.

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

(1). Delphine (F_1) : $\neg(p \wedge q \wedge r)$ Marinette (F_2) : $r \Rightarrow p$ le chat (F_3) : $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

Sans utiliser de table de vérité.

$$[F_1]^{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) \cdot \mathbf{I}(r)} \quad [F_2]^{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{I}(r)} + \mathbf{I}(p) \quad [F_3]^{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q) + (\mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q))$$

(2). Montrons par l'absurde que $\mathbf{I}(r) = 0$. Supposons $\mathbf{I}(r) = 1$, alors $\overline{\mathbf{I}(r)} = 0$ et puisque $[F_2]^{\mathbf{I}} = 1$, il vient $\mathbf{I}(p) = 1$ et donc $\mathbf{I}(p) + \mathbf{I}(q) = 1$ et on obtient $\overline{\mathbf{I}(p)} + \mathbf{I}(q) = 0$. Puisque $[F_3]^{\mathbf{I}} = 1$, on a donc $\mathbf{I}(p) \cdot \mathbf{I}(q) = 1$ et on en déduit $\mathbf{I}(q) = 1$. Or puisque $[F_1]^{\mathbf{I}} = 1$ on devrait alors avoir $\overline{1 \cdot 1 \cdot 1} = 1$ ce qui est impossible. On a donc nécessairement $\mathbf{I}(r) = 0$: le chat n'est pas perché. Par contre, on ne peut rien déduire sur Delphine et Marinette, excepté le fait qu'elles sont soit toutes les deux perchées soit toutes les deux non perchées, puisque si $\mathbf{I}(r) = 0$ et $\mathbf{I}(p) = \mathbf{I}(q) = 1$ on a $[F_1]^{\mathbf{I}} = [F_2]^{\mathbf{I}} = [F_3]^{\mathbf{I}} = 1$, et si $\mathbf{I}(r) = \mathbf{I}(p) = \mathbf{I}(q) = 0$ on a aussi $[F_1]^{\mathbf{I}} = [F_2]^{\mathbf{I}} = [F_3]^{\mathbf{I}} = 1$.

(3). Si l'on suppose que seul le chat est perché, c-à-d si on considère l'interprétation \mathbf{I} telle que $\mathbf{I}(p) = \mathbf{I}(q) = 0$ et $\mathbf{I}(r) = 1$, alors et il vient :

$$[F_1]^{\mathbf{I}} = \overline{0 \cdot 0 \cdot 1} = 1 \quad [F_2]^{\mathbf{I}} = \overline{1} + 0 = 0 \quad [F_3]^{\mathbf{I}} = \overline{0} + \overline{0} + (0 \cdot 0) = 1$$

On peut donc en déduire que Delphine et le chat disent la vérité et que Marinette ment.

En utilisant une table de vérité.

$\mathbf{I}(p)$	$\mathbf{I}(q)$	$\mathbf{I}(r)$	$[F_1]^{\mathbf{I}}$	$[F_2]^{\mathbf{I}}$	$[F_3]^{\mathbf{I}}$	
0	0	0	1	1	1	\mathbf{I}_1
0	0	1	1	0	1	\mathbf{I}_3
0	1	0	1	1	0	
0	1	1	1	0	0	
1	0	0	1	1	0	
1	0	1	1	1	0	
1	1	0	1	1	1	\mathbf{I}_2
1	1	1	0	1	1	

(2). Seules les interprétations \mathbf{I}_1 et \mathbf{I}_2 satisfont simultanément les trois formules F_1 , F_2 et F_3 . Pour ces deux interprétations on peut remarquer que $\mathbf{I}_1(r) = \mathbf{I}_2(r) = 0$ et on peut donc en déduire que le chat n'est pas perché. Par contre, on ne peut rien déduire sur Delphine ou Marinette, excepté le fait qu'elles sont soit toutes les deux perchées soit toutes les deux non perchées, puisque $\mathbf{I}_1(p) = \mathbf{I}_1(q) = 0$ et $\mathbf{I}_2(p) = \mathbf{I}_2(q) = 1$.

(3). Seule l'interprétation \mathbf{I}_3 , exprime que seul le chat est perché. Pour cette interprétation on peut remarquer que $[F_1]^{\mathbf{I}_3} = [F_3]^{\mathbf{I}_3} = 1$ et $[F_2]^{\mathbf{I}_3} = 0$. On peut donc en déduire que Delphine et le chat disent la vérité et que Marinette ment.

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

(1). Les occurrences de variable libre dans F sont encadrées ci-dessous et donc $\text{Free}(F) = \{x, y, z, w\}$.

$$F = (\forall x \, p(x, \boxed{y}, \boxed{z})) \wedge (\forall y \, q(\boxed{x}, y, \boxed{w}))$$

(2). La clôture universelle de la formule F peut s'écrire : $\forall x \forall y \forall z \forall w \, ((\forall x \, p(x, y, z)) \wedge (\forall y \, q(x, y, w)))$ ou de manière équivalente : $\forall x \forall y \forall z \forall w \, ((\forall x_1 \, p(x_1, y, z)) \wedge (\forall y_1 \, q(x, y_1, w)))$

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.

(1). Toute structure \mathbf{M}_1 telle que $p^{\mathbf{M}_1} = |\mathbf{M}_1| \times |\mathbf{M}_1|$ vérifie $[F_1]_v^{\mathbf{M}_1} = [F_2]_v^{\mathbf{M}_1} = 1$. En effet :

$$\begin{aligned} [F_1]_v^{\mathbf{M}_1} = 1 & \text{ car } [\exists y \, p(x, y)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}_1} = 1 \text{ pour chaque } m \in |\mathbf{M}_1| \\ & \text{ car } [p(x, y)]_{v[x \leftarrow m][y \leftarrow m]}^{\mathbf{M}_1} = 1 \text{ car } (m, m) \in p^{\mathbf{M}_1} \\ [F_2]_v^{\mathbf{M}_1} = 1 & \text{ car } [\forall x \, p(x, y)]_{v[y \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}_1} = 1 \text{ pour un élément } m_1 \in |\mathbf{M}_1| \neq \emptyset \\ & \text{ car } [p(x, y)]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}_1} = 1 \text{ pour chaque } m_2 \in |\mathbf{M}_1| \\ & \text{ car } (m_2, m_1) \in p^{\mathbf{M}_1} \end{aligned}$$

Par exemple, la structure \mathbf{M}_1 de domaine $|\mathbf{M}_1| = \{a\}$ telle que $p^{\mathbf{M}_1} = \{(a, a)\}$ vérifie $[F_1]_v^{\mathbf{M}_1} = [F_2]_v^{\mathbf{M}_1} = 1$. En effet :

$$\begin{aligned} [F_1]_v^{\mathbf{M}_1} = 1 & \text{ car } [\exists y \, p(x, y)]_{v[x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}_1} = 1 \text{ car } [p(x, y)]_{v[x \leftarrow a][y \leftarrow a]}^{\mathbf{M}_1} = 1 \text{ car } (a, a) \in p^{\mathbf{M}_1} \\ [F_2]_v^{\mathbf{M}_1} = 1 & \text{ car } [\forall x \, p(x, y)]_{v[y \leftarrow a]}^{\mathbf{M}_1} = 1 \text{ car } [p(x, y)]_{v[y \leftarrow a][x \leftarrow a]}^{\mathbf{M}_1} = 1 \text{ car } (a, a) \in p^{\mathbf{M}_1} \end{aligned}$$

(2). Toute structure \mathbf{M}_2 telle que $p^{\mathbf{M}_2} = \emptyset$ vérifie $[F_1]_v^{\mathbf{M}_2} = [F_2]_v^{\mathbf{M}_2} = 0$.

(3). La structure \mathbf{M}_3 de domaine $|\mathbf{M}_1| = \mathbb{N}$ telle que $p^{\mathbf{M}_3} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\}$ vérifie $[F_1]_v^{\mathbf{M}_3} = 1$ et $[F_2]_v^{\mathbf{M}_3} = 0$. En effet :

$$\begin{aligned} [F_1]_v^{\mathbf{M}_3} = 1 & \text{ car } [\exists y \, p(x, y)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}_3} = 1 \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} \\ & \text{ car } [p(x, y)]_{v[x \leftarrow m][y \leftarrow m+1]}^{\mathbf{M}_3} = 1 \text{ car } (m, m+1) \in p^{\mathbf{M}_3} \\ [F_2]_v^{\mathbf{M}_3} = 0 & \text{ car } [\forall x \, p(x, y)]_{v[y \leftarrow m]}^{\mathbf{M}_3} = 0 \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} \\ & \text{ car } [p(x, y)]_{v[y \leftarrow m][x \leftarrow m+1]}^{\mathbf{M}_3} = 0 \text{ car } (m+1, m) \notin p^{\mathbf{M}_3} \end{aligned}$$

(4). Il n'existe pas de structure \mathbf{M}_4 telle que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_4} = 0$ et $[F_2]_v^{\mathbf{M}_4} = 1$ car F_1 est une conséquence sémantique de F_2 ($F_2 \models F_1$). En effet, si $[F_2]_v^{\mathbf{M}_4} = 1$, alors il existe un élément $m_1 \in |\mathbf{M}_4|$ tel que $[\forall x p(x, y)]_{v[y \leftarrow m_1]}^{\mathbf{M}_4} = 1$ et donc pour tout élément $m_2 \in |\mathbf{M}_4|$, on a $[p(x, y)]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}_4} = 1$. On obtient alors $[F_1]_v^{\mathbf{M}_4} = 1$ car $[\exists y p(x, y)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}_4} = 1$ pour tout $m \in |\mathbf{M}_4|$ car $[p(x, y)]_{v[y \leftarrow m_1][x \leftarrow m_2]}^{\mathbf{M}_4} = 1$ pour tout élément $m_2 \in |\mathbf{M}_4|$.

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5.

(1). (a). $0 \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$

Si $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$, alors $c(t) \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$.

Si $t_1 \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$ et $t_2 \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$, alors $\oplus(t_1, t_2) \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$ et $\otimes(t_1, t_2) \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$.

(b). On définit la structure \mathbf{M}_1 comme suit :

$$\begin{aligned} 0^{\mathbf{M}_1} &= 0 & c^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & \oplus^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & \otimes^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ c^{\mathbf{M}_1}(n) &= n & \oplus^{\mathbf{M}_1}(n_1, n_2) &= 1 + n_1 + n_2 & \otimes^{\mathbf{M}_1}(n_1, n_2) &= 1 + n_1 + n_2 \end{aligned}$$

(c). Etant donné un terme $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$, on note $P(t)$ la propriété $[t]_v^{\mathbf{M}_1} + 1 = \text{nb}_0(t)$. Montrons par induction sur t que $P(t)$ est vérifié pour tout terme $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$.

$P(0)$ est vérifié car $[0]_v^{\mathbf{M}_1} + 1 = 0 + 1 = 1 = \text{nb}_0(0)$.

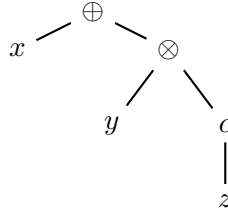
Soit $t \in \mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$, supposons $P(t)$ et montrons $P(c(t))$:

$$[c(t)]_v^{\mathbf{M}_1} + 1 \stackrel{\text{def.}}{=} c^{\mathbf{M}_1}([t]_v^{\mathbf{M}_1}) + 1 \stackrel{\text{def.}}{=} [t]_v^{\mathbf{M}_1} + 1 \stackrel{\text{HI}}{=} \text{nb}_0(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \text{nb}_0(c(t))$$

Soit t_1 et t_2 deux termes de $\mathcal{T}(\emptyset, \mathcal{F})$. Supposons $P(t_1)$ et $P(t_2)$ et montrons $P(\oplus(t_1, t_2))$ et $P(\otimes(t_1, t_2))$.

$$\begin{aligned} [\oplus(t_1, t_2)]_v^{\mathbf{M}_1} + 1 &\stackrel{\text{def.}}{=} \oplus^{\mathbf{M}_1}([t_1]_v^{\mathbf{M}_1}, [t_2]_v^{\mathbf{M}_1}) + 1 \stackrel{\text{def.}}{=} 1 + [t_1]_v^{\mathbf{M}_1} + [t_2]_v^{\mathbf{M}_1} + 1 \\ &\stackrel{\text{HI}}{=} 1 + \text{nb}_0(t_1) - 1 + \text{nb}_0(t_2) - 1 + 1 = \text{nb}_0(t_1) + \text{nb}_0(t_2) = \text{nb}_0(\oplus(t_1, t_2)) \\ [\otimes(t_1, t_2)]_v^{\mathbf{M}_1} + 1 &\stackrel{\text{def.}}{=} \otimes^{\mathbf{M}_1}([t_1]_v^{\mathbf{M}_1}, [t_2]_v^{\mathbf{M}_1}) + 1 \stackrel{\text{def.}}{=} 1 + [t_1]_v^{\mathbf{M}_1} + [t_2]_v^{\mathbf{M}_1} + 1 \\ &\stackrel{\text{HI}}{=} 1 + \text{nb}_0(t_1) - 1 + \text{nb}_0(t_2) - 1 + 1 = \text{nb}_0(t_1) + \text{nb}_0(t_2) = \text{nb}_0(\otimes(t_1, t_2)) \end{aligned}$$

(2). (a).



(b).

$$\begin{aligned} [\oplus(x, \otimes(y, c(z)))]_{v_1}^{\mathbf{M}_2} &= \oplus^{\mathbf{M}_2}(v_1(x), \otimes^{\mathbf{M}_2}(v_1(y), c^{\mathbf{M}_2}(v_1(z)))) = v_1(x) \cup (v_1(y) \cap \overline{v_1(z)}) \\ &= \{5, 6, 7\} \cup (\emptyset \cap \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}) = \{5, 6, 7\} \cup \emptyset = \{5, 6, 7\} \end{aligned}$$

(c). On a :

$$\begin{aligned} [F_1]_v^{\mathbf{M}_2} = 1 &\text{ ssi } [\text{eq}(x, \oplus(y, z))]_{v[z \leftarrow E]}^{\mathbf{M}_2} = 1 \text{ pour un sous-ensemble } E \text{ de } A \\ &\text{ssi } ([x]_{v[z \leftarrow E]}^{\mathbf{M}_2}, \oplus^{\mathbf{M}_2}([y]_{v[z \leftarrow E]}^{\mathbf{M}_2}, [z]_{v[z \leftarrow E]}^{\mathbf{M}_2})) \in \text{eq}^{\mathbf{M}_2} \text{ pour un sous-ensemble } E \text{ de } A \\ &\text{ssi } v(x) = v(y) \cup E \in \text{eq}^{\mathbf{M}_2} \text{ pour un sous-ensemble } E \text{ de } A \\ &\text{ssi } v(y) \subseteq v(x) \\ [F_2]_v^{\mathbf{M}_2} = 1 &\text{ car } [\forall y (F_1 \Rightarrow \text{eq}(\otimes(y, c(x)), 0))]_{v[x \leftarrow E_1]}^{\mathbf{M}_2} = 1 \text{ pour tout } E_1 \subseteq A \\ &\text{car } [F_1 \Rightarrow \text{eq}(\otimes(y, c(x)), 0)]_{v[x \leftarrow E_1][y \leftarrow E_2]}^{\mathbf{M}_2} = 1 \text{ pour tout } E_1 \subseteq A \text{ et tout } E_2 \subseteq A \\ &\text{car si } E_2 \subseteq E_1 \text{ alors } E_2 \cap \overline{E_1} = \emptyset \end{aligned}$$