

Examen partiel du 06/11/2018

Durée 1h30

Téléphones, calculettes et ordinateurs interdits.

Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Dédution Naturelle. Inscrivez votre nom et votre numéro de groupe de TD sur votre copie. La note (entre 0 et 60) est le minimum entre 60 et la somme des points obtenus (entre 0 et 68).

Exercice 1 ((1,5+1,5+1)+(1+2,5+1+0,5)=9 points)

1. A partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{x, y, z\}$ on définit la formule $F_1 \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ suivante : $p(a, g(h(x), b)) \wedge \forall x(\exists x \forall z p(x, f(b, y, z)) \vee \exists y q(x, h(y), z))$

- (a) Déterminer l'ensemble $\text{Free}(F_1)$ des variables qui ont au moins une occurrence libre dans F_1 .
(b) Le symbole de variable x admet 3 occurrences dans la formule F_1 , numérotées de 1 à 3 comme suit :

$$p(a, g(h(\underbrace{x}_1), b)) \wedge \forall x(\exists x \forall z p(\underbrace{x}_2, f(b, y, z)) \vee \exists y q(\underbrace{x}_3, h(y), z))$$

Pour chacune de ces occurrences, déterminer si elle correspond à une occurrence libre de x , à une occurrence quantifiée universellement ($\forall x$) de x ou bien à une occurrence quantifiée existentiellement ($\exists x$) de x .

- (c) Déterminer une clôture universelle de la formule F_1 .
2. On considère les symboles s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 et s_6 appartenant à $X \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ à partir desquels on définit la formule $F_2 \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ suivante : $\forall s_1 (s_2(s_3(s_1, s_4(s_5))) \Rightarrow s_6(s_4(s_1), s_5))$.
(a) Quelles sont les formules atomiques apparaissant dans F_2 ?
(b) Déterminer à quel ensemble chacun des symboles s_1, s_2, s_3, s_4 et s_6 appartient (c-à-d déterminer s'il s'agit d'un symbole de variable de X , d'un symbole de fonction de \mathcal{F} ou d'un symbole de prédicat de \mathcal{P}).
(c) Que peut-on dire du symbole s_5 ? A quels ensembles peut-il appartenir ?
(d) Quels sont les termes apparaissant en argument des symboles de prédicat de F_2 ?

Exercice 2 (10+12=22 points)

Avec les règles de la déduction naturelle prouver les deux formules ci-dessous (on pourra utiliser les règles dérivées du formulaire).

$$(A \wedge B) \Rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \qquad A \Rightarrow ((\neg A \vee B) \Rightarrow B)$$

Exercice 3 (1+(3+(3+1)+(1+1)+(1+1+1+1+1)+(1,5+1,5))=19 points)

1. Soient F_1 et F_2 deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$. Donner la définition mathématique de $F_1 \models F_2$.
2. Soit F la formule $(\neg A \vee B) \Rightarrow A$.
(a) Etant donnée une structure \mathbf{M} , calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$ (sans effectuer de simplification).

- (b) En utilisant un raisonnement équationnel, simplifier l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée). En déduire que $F \models A$.
- (c) La formule F est-elle satisfiable ? est-elle valide ? (justifier)
- (d) Indiquer sans justification si les formules suivantes sont valides :

$$F_1 = F \Rightarrow A \quad F_2 = \neg F \Rightarrow \neg A \quad F_3 = F \vee A \quad F_4 = F \vee \neg A \quad F_5 = F \wedge A \quad F_6 = \neg(F \wedge \neg A)$$

- (e) Soit F' une formule.

- i. A-t-on $F \wedge \neg A \models F'$? (justifier)
- ii. Quelle propriété doit vérifier F' pour que $F' \models F \wedge \neg A$?

Exercice 4 (1+2+(4+4)+(2+5)=18 points)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_1 = \{\odot\}$ et \mathcal{F}_0 contient une infinité de symboles de constante numérotés par des entiers :

$$\mathcal{F}_0 = \{k_0, k_1, k_2, \dots\} = \bigcup_{i \geq 0} \{k_i\}$$

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$.
2. Donner une définition inductive du nombre $\text{nb}_{\odot}(t)$ d'occurrences du symbole \odot dans un terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
3. Soit p un symbole de prédicat d'arité 2 ($\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$) et $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ la formule :

$$\neg p(k_1, k_2) \vee p(\odot(k_2), \odot(k_1))$$

- (a) Définir une structure \mathbf{M}_1 telle que $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$. (justifier)
 - (b) Définir une structure \mathbf{M}_2 telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$. (justifier)
4. On définit une structure \mathbf{M}_3 dont le domaine est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels comme suit :

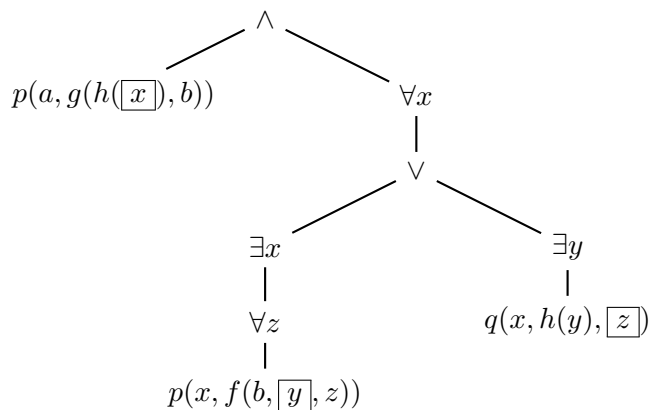
$$\begin{aligned} k_i^{\mathbf{M}_3} &= (i, 0) & \odot^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \text{pour tout } k_i \in \mathcal{F}_0 & & \odot^{\mathbf{M}_3}((n_1, n_2)) &= (n_1, n_1 + n_2) \end{aligned}$$

- (a) Calculer $[\odot(\odot(\odot(k_5)))]^{\mathbf{M}_3}$.
- (b) Montrer par induction que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe un entier $i \in \mathbb{N}$ tel que $[t]^{\mathbf{M}_3} = (i, i \times \text{nb}_{\odot}(t))$.

Corrigé de l'examen partiel du 06/11/2018

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

(1.a). Les occurrences de variable libre sont encadrées sur l'arbre de syntaxe abstraite de la formule F_1 (les autres occurrences sont liées) :



On a donc $\text{Free}(F_1) = \{x, y, z\}$.

(1.b). L'occurrence 1 de x est libre, l'occurrence 2 de x est liée et est quantifiée existentiellement ($\exists x$), et l'occurrence 3 de x est liée et est quantifiée universellement ($\forall x$).

(1.c). Clôture universelle de F_1 : $\forall x \forall y \forall z F_1$

(2.a). Les formules atomiques apparaissant dans F_2 sont $s_2(s_3(s_1, s_4(s_5)))$ et $s_6(s_4(s_1), s_5)$.

(2.b). Le symbole s_1 est le premier symbole qui apparaît à droite du quantificateur \forall , c'est donc un symbole de variable de X . Les symboles s_2 et s_6 sont les symboles de prédicat de \mathcal{P} des deux formules atomiques de F_2 ($s_2 \in \mathcal{P}_1$ et $s_6 \in \mathcal{P}_2$). Le symbole s_3 admet pour arguments s_1 et $s_4(s_5)$ pour former le terme $s_3(s_1, s_4(s_5))$: c'est donc un symbole de fonction de \mathcal{F} ; de même le symbole s_4 admet pour argument le symbole s_5 pour former le terme $s_4(s_5)$ qui est un argument de la fonction s_3 , c'est donc aussi un symbole de fonction de \mathcal{F} ($s_3 \in \mathcal{F}_2$ et $s_4 \in \mathcal{F}_1$).

(2.c). Le symbole s_5 ne peut pas être un symbole de prédicat puisqu'il apparaît en argument du symbole de fonction s_4 . C'est un symbole sans argument qui peut donc être soit un symbole de variable de X (il s'agit alors d'une occurrence libre de ce symbole de variable), soit un symbole de constante de \mathcal{F}_0 .

(2.d). Les termes apparaissant en argument des symboles de prédicat de F_2 sont $s_3(s_1, s_4(s_5))$, $s_4(s_1)$ et s_5 .

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

⟨1⟩	montrons $(A \wedge B) \Rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
⟨2⟩	supposons $h_1 : A \wedge B$, montrons $\neg(\neg A \vee \neg B)$
⟨3⟩	supposons $h_2 : \neg A \vee \neg B$, montrons false
⟨4⟩	montrons $\neg A \vee \neg B$ c'est l'hypothèse h_2
⟨4⟩	CQFD (Ax)
⟨5⟩	supposons $h_3 : \neg A$, montrons false
⟨6⟩	montrons $\neg A$ c'est l'hypothèse h_3
⟨6⟩	CQFD (Ax)
⟨7⟩	montrons A
⟨7⟩	CQFD (D_{\wedge}^g avec h_1)
⟨5⟩	CQFD (E_{\neg})
⟨6⟩	supposons $h_4 : \neg B$, montrons false
⟨7⟩	montrons $\neg B$ c'est l'hypothèse h_4
⟨7⟩	CQFD (Ax)
⟨8⟩	montrons B
⟨8⟩	CQFD (D_{\wedge}^d avec h_1)
⟨6⟩	CQFD (E_{\neg})
⟨3⟩	CQFD (E_{\vee})
⟨2⟩	CQFD (I_{\neg})
⟨1⟩	CQFD (I_{\Rightarrow})

⟨1⟩	montrons $A \Rightarrow ((\neg A \vee B) \Rightarrow B)$
⟨2⟩	supposons $h_1 : A$, montrons $(\neg A \vee B) \Rightarrow B$
⟨3⟩	supposons $h_2 : \neg A \vee B$, montrons B
⟨4⟩	montrons $\neg A \vee B$ c'est l'hypothèse h_2
⟨4⟩	CQFD (Ax)
⟨5⟩	supposons $h_3 : \neg A$, montrons B
⟨6⟩	montrons false
⟨7⟩	montrons $\neg A$ c'est l'hypothèse h_3
⟨7⟩	CQFD (Ax)
⟨8⟩	montrons A c'est l'hypothèse h_1
⟨8⟩	CQFD (Ax)
⟨6⟩	CQFD (E_{\neg})
⟨5⟩	CQFD ($\perp E$)
⟨6⟩	supposons $h_4 : B$, montrons B c'est l'hypothèse h_4
⟨6⟩	CQFD (Ax)
⟨3⟩	CQFD (E_{\vee})
⟨2⟩	CQFD (I_{\Rightarrow})
⟨1⟩	CQFD (I_{\Rightarrow})

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

(1). $F_1 \models F_2$ si et seulement si pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$.

$$(2.a). \quad [F]^{\mathbf{M}} = \overline{[\neg A \vee B]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} = \overline{[\neg A]^{\mathbf{M}} + [B]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} = \overline{[A]^{\mathbf{M}}} + [B]^{\mathbf{M}} + [A]^{\mathbf{M}} \\ = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$$

(2.b). Posons $x = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ et $y = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$.

$$[F]^{\mathbf{M}} = \overline{\overline{x} + y} + x \stackrel{E4.4}{=} \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} + x \stackrel{E1.2}{=} x \cdot \overline{y} + x \stackrel{E2.6}{=} x \cdot \overline{y} + x \cdot 1 \stackrel{E4.1}{=} x \cdot (\overline{y} + 1) \stackrel{E3.7}{=} x \cdot 1 \stackrel{E2.6}{=} x = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$$

Pour toute structure \mathbf{M} , on a $[F]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) = [A]^{\mathbf{M}}$ et donc $F \models A$.

(2.c). La formule F est satisfiable car si \mathbf{M}_1 est une structure telle que $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(A) = 1$ on a $[F]^{\mathbf{M}_1} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(A) = 1$, mais elle n'est pas valide car si l'on considère la structure \mathbf{M}_2 telle que $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(A) = 0$ on a $[F]^{\mathbf{M}_2} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(A) = 0$.

(2.d). La formule F_1 est valide puisque $[F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{[F]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} \equiv \overline{[A]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} \equiv 1$. De même, la formule F_2 est valide puisque $[F_2]^{\mathbf{M}} = \overline{[F]^{\mathbf{M}}} + \overline{[A]^{\mathbf{M}}} \equiv [F]^{\mathbf{M}} + \overline{[A]^{\mathbf{M}}} \equiv [A]^{\mathbf{M}} + \overline{[A]^{\mathbf{M}}} \equiv 1$. La formule F_3 n'est pas valide puisque $[F_3]^{\mathbf{M}} = [F]^{\mathbf{M}} + [A]^{\mathbf{M}} \equiv [A]^{\mathbf{M}} + [A]^{\mathbf{M}} \equiv [A]^{\mathbf{M}}$ et si l'on considère la structure \mathbf{M} telle que $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) = 0$ on a $[F_3]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) = 0$. La formule F_4 est valide puisque $[F_4]^{\mathbf{M}} = [F]^{\mathbf{M}} + \overline{[A]^{\mathbf{M}}} \equiv [A]^{\mathbf{M}} + \overline{[A]^{\mathbf{M}}} \equiv 1$. La formule F_5 n'est pas valide puisque $[F_5]^{\mathbf{M}} = [F]^{\mathbf{M}} \cdot [A]^{\mathbf{M}} \equiv [A]^{\mathbf{M}} \cdot [A]^{\mathbf{M}} \equiv [A]^{\mathbf{M}}$ et si l'on considère la structure \mathbf{M} telle que $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) = 0$ on a $[F_5]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) = 0$. La formule F_6 est valide puisque $[F_6]^{\mathbf{M}} = [F]^{\mathbf{M}} \cdot \overline{[A]^{\mathbf{M}}} \equiv [A]^{\mathbf{M}} \cdot \overline{[A]^{\mathbf{M}}} \equiv \bar{0} = 1$.

(2.e). La formule $F \wedge \neg A$ est équivalente à $\neg F_6$ où F_6 est la formule de la question précédente (car $\neg \neg(F \wedge \neg A)$ est équivalente à $F \wedge \neg A$), qui est une formule valide. $F \wedge \neg A$ est donc insatisfiable, c-à-d qu'il n'existe aucune structure \mathbf{M} telle que $[F \wedge \neg A]^{\mathbf{M}} = 1$. On a donc bien $F \wedge \neg A \models F'$. Aussi, puisque $F \wedge \neg A$ est insatisfiable, pour que $F' \models F \wedge \neg A$ il faut que F' soit également insatisfiable (ou de manière équivalente que $F' \models F \wedge \neg A$).

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.

(1). Définition inductive de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$:

Si $k_i \in \mathcal{F}_0$, alors $k_i \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

Si $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $\odot(t) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

(2). Définition inductive du nombre $\text{nb}_{\odot}(t)$ d'occurrences du symbole \odot dans $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$:

$$\text{nb}_{\odot}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = k_i \in \mathcal{F}_0 \\ 1 + \text{nb}_{\odot}(t') & \text{si } t = \odot(t') \end{cases}$$

(3.a). On définit la structure \mathbf{M}_1 dont le domaine est l'ensemble des entiers relatifs $|\mathbf{M}_1| = \mathbb{Z}$ et telle que :

$$\begin{array}{lll} k_i^{\mathbf{M}_1} = i & \odot^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} & p^{\mathbf{M}_1} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ \text{pour tout } k_i \in \mathcal{F}_0 & \odot^{\mathbf{M}_1}(n) = -n & p^{\mathbf{M}_1} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\} \end{array}$$

Puisque d'une part $k_1^{\mathbf{M}_1} = 1$ et $k_2^{\mathbf{M}_1} = 2$ et donc $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(p(k_1, k_2)) = 1$ car $(k_1^{\mathbf{M}_1}, k_2^{\mathbf{M}_1}) = (1, 2) \in p^{\mathbf{M}_1}$, et d'autre part, $[\odot(k_1)]^{\mathbf{M}_1} = \odot^{\mathbf{M}_1}(k_1^{\mathbf{M}_1}) = \odot^{\mathbf{M}_1}(1) = -1$ et $[\odot(k_2)]^{\mathbf{M}_1} = \odot^{\mathbf{M}_1}(k_2^{\mathbf{M}_1}) = \odot^{\mathbf{M}_1}(2) = -2$ et donc $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(p(\odot(k_2), \odot(k_1))) = 1$ car $([\odot(k_2)]^{\mathbf{M}_1}, [\odot(k_1)]^{\mathbf{M}_1}) = (-2, -1) \in p^{\mathbf{M}_1}$, il vient :

$$[F]^{\mathbf{M}_1} = \overline{[p(k_1, k_2)]^{\mathbf{M}_1}} + [p(\odot(k_2), \odot(k_1))]^{\mathbf{M}_1} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(p(k_1, k_2))} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(p(\odot(k_2), \odot(k_1))) = \bar{1} + 1 = 1$$

(3.b). On définit la structure \mathbf{M}_2 dont le domaine est l'ensemble des entiers relatifs $|\mathbf{M}_2| = \mathbb{Z}$ et telle que :

$$\begin{array}{lll} k_i^{\mathbf{M}_2} = i & \odot^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} & p^{\mathbf{M}_2} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ \text{pour tout } k_i \in \mathcal{F}_0 & \odot^{\mathbf{M}_2}(n) = 2n & p^{\mathbf{M}_2} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\} \end{array}$$

Puisque d'une part $k_1^{\mathbf{M}_2} = 1$ et $k_2^{\mathbf{M}_2} = 2$ et donc $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(p(k_1, k_2)) = 1$ car $(k_1^{\mathbf{M}_2}, k_2^{\mathbf{M}_2}) = (1, 2) \in p^{\mathbf{M}_2}$, et d'autre part, $[\odot(k_1)]^{\mathbf{M}_2} = \odot^{\mathbf{M}_2}(k_1^{\mathbf{M}_2}) = \odot^{\mathbf{M}_2}(1) = 2$ et $[\odot(k_2)]^{\mathbf{M}_2} = \odot^{\mathbf{M}_2}(k_2^{\mathbf{M}_2}) = \odot^{\mathbf{M}_2}(2) = 4$ et donc $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(p(\odot(k_2), \odot(k_1))) = 0$ car $([\odot(k_2)]^{\mathbf{M}_2}, [\odot(k_1)]^{\mathbf{M}_2}) = (4, 2) \notin p^{\mathbf{M}_2}$, il vient :

$$[F]^{\mathbf{M}_2} = \overline{[p(k_1, k_2)]^{\mathbf{M}_2}} + [p(\odot(k_2), \odot(k_1))]^{\mathbf{M}_2} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(p(k_1, k_2))} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(p(\odot(k_2), \odot(k_1))) = \bar{1} + 0 = 0$$

$$\begin{aligned} (4.a.) \quad [\odot(\odot(\odot(k_5)))]^{\mathbf{M}_3} &= \odot^{\mathbf{M}_3}(\odot^{\mathbf{M}_3}(\odot^{\mathbf{M}_3}(k_5^{\mathbf{M}_3}))) = \odot^{\mathbf{M}_3}(\odot^{\mathbf{M}_3}(\odot^{\mathbf{M}_3}((5, 0)))) \\ &= \odot^{\mathbf{M}_3}(\odot^{\mathbf{M}_3}((5, 5))) = \odot^{\mathbf{M}_3}((5, 10)) = (5, 15) \end{aligned}$$

(4.b). Raisonnement par induction sur t .

- (B). Si $t = k_i \in \mathcal{F}_0$, alors $[k_i]^{\mathbf{M}_3} = k_i^{\mathbf{M}_3} = (i, 0) = (i, i \times 0) = (i, i \times \text{nb}_\odot(k_i))$.
(I). Si $t = \odot(t')$, alors :

$$\begin{aligned}
& [\odot(t')]^{\mathbf{M}_3} \\
= & \odot^{\mathbf{M}_3}([t']^{\mathbf{M}_3}) \\
= & \odot^{\mathbf{M}_3}((i, i \times \text{nb}_\odot(t'))) \quad \text{par hypothèse d'induction} \\
= & (i, i + i \times \text{nb}_\odot(t')) \quad \text{par définition} \\
= & (i, i \times (1 + \text{nb}_\odot(t'))) \\
= & (i, i \times \text{nb}_\odot(\odot(t'))) \quad \text{par définition}
\end{aligned}$$