

Examen partiel – 11 Mars 2020

Durée 1h30

Téléphones, calculatrices et ordinateurs interdits. Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la déduction naturelle. Inscrire votre nom et votre numéro de groupe de TD sur votre copie.

Exercice 1 (0,5+0,5+1+1+2=5 points)

Soit la formule $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ où $X = \{x, x_1, x_2, x_3, z\}$ définie par :

$$(\forall x (s_1(s_2(x, x)) \wedge \exists x s_1(s_2(x, z)))) \wedge (s_3(s_4(x)) \wedge (\exists x s_1(s_2(x, z))))$$

1. Quels sont les symboles de fonction apparaissant dans F ? Donner l'arité de ces symboles.
2. Quels sont les symboles de prédicat apparaissant dans F ? Donner l'arité de ces symboles.
3. Déterminer l'ensemble $\text{Free}(F)$.
4. Donner une clôture universelle de F .
5. On souhaite renommer certains symboles de variable pour obtenir une formule logiquement équivalente à F et dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents. On propose la formule suivante :

$$(\forall x_1 (s_1(s_2(\square, \square)) \wedge \exists x_2 s_1(s_2(\square, \square)))) \wedge (s_3(s_4(\square)) \wedge (\exists x_3 s_1(s_2(\square, \square))))$$

Remplacer les \square par les symboles de variable appropriés.

Exercice 2 (6+8=14 points)

Avec les règles de la déduction naturelle prouver les deux formules ci-dessous (on pourra utiliser les règles dérivées du formulaire).

$$(\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \Rightarrow A \qquad ((A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)) \Rightarrow (A \vee B)$$

Exercice 3 (1+1+2+4=8 points)

1. Donner la définition mathématique d'une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ valide.
2. Soit F la formule $(\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \Rightarrow A$.
 - (a) Etant donnée une structure \mathbf{M} , calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ (sans effectuer de simplification).
 - (b) En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que F est une formule valide (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
 - (c) Soit G une formule quelconque. A-t-on :

$$(i) G \models F ? \qquad (ii) F \models G ? \qquad (iii) G \models \neg F ? \qquad (iv) \neg F \models G ?$$

Justifier vos réponses.

Exercice 4 (1+3+(2+2)+(1+3)=12 points)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f\}$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \{a, f\}$.
2. Etant donné un entier naturel n , on note $f^n(a)$ le terme défini par :

$$f^n(a) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ f(f^{n-1}(a)) & \text{si } n = p + 1 \end{cases}$$

Montrer par induction que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ il existe un entier n tel que $t = f^n(a)$.

3. Soit p et q deux symboles de prédicat d'arité 2 et F la formule $p(a, f(a)) \Rightarrow q(f(a), a)$.
 - (a) Définir une structure \mathbf{M}_1 telle que $p^{\mathbf{M}_1} \neq \emptyset$ et $[F]^{\mathbf{M}_1} = 1$. (justifier)
 - (b) Définir une structure \mathbf{M}_2 telle que $p^{\mathbf{M}_2} \neq \emptyset$, $q^{\mathbf{M}_2} \neq \emptyset$ et $[F]^{\mathbf{M}_2} = 0$. (justifier)
4. On définit une structure \mathbf{M}_3 dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels comme suit :

$$a^{\mathbf{M}_3} = (0, 1) \quad \begin{aligned} f^{\mathbf{M}_3} : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) &\rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ f^{\mathbf{M}_3}((n_1, n_2)) &= (n_2, n_2 + n_1) \end{aligned}$$

- (a) Calculer $[f(f(a))]^{\mathbf{M}_3}$.
- (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $[f^n(a)]^{\mathbf{M}_3} = (u_n, u_{n+1})$ où u_n est le n -ième nombre de Fibonacci défini par :

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n \geq 2)$$

3

On a $[F]^{\mathbf{M}_1} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(p(a, f(a)))} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(q(f(a), a)) = \bar{1} + 1 = 1$ car $[a]^{\mathbf{M}_1} = a^{\mathbf{M}_1} = 2$ et $[f(a)]^{\mathbf{M}_1} = f^{\mathbf{M}_1}(a^{\mathbf{M}_1}) = 2 + 1 = 3$ et donc $([a]^{\mathbf{M}_1}, [f(a)]^{\mathbf{M}_1}) = (2, 3) \in p^{\mathbf{M}_1}$ et $([f(a)]^{\mathbf{M}_1}, [a]^{\mathbf{M}_1}) = (3, 2) \in q^{\mathbf{M}_1}$.

(3.b) On définit la structure \mathbf{M}_2 dont le domaine est l'ensemble des entiers naturels $|\mathbf{M}_2| = \mathbb{N}$ et telle que :

$$\begin{array}{llll} a^{\mathbf{M}_2} = 2 & f^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & p^{\mathbf{M}_2} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} & q^{\mathbf{M}_2} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ & f^{\mathbf{M}_2}(n) = n + 1 & p^{\mathbf{M}_2} = \{(2, 3)\} & q^{\mathbf{M}_2} = \{(2, 3)\} \end{array}$$

On a $[F]^{\mathbf{M}_2} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(p(a, f(a)))} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(q(f(a), a)) = \bar{1} + 0 = 0$ car $[a]^{\mathbf{M}_2} = a^{\mathbf{M}_2} = 2$ et $[f(a)]^{\mathbf{M}_2} = f^{\mathbf{M}_2}(a^{\mathbf{M}_2}) = 2 + 1 = 3$ et donc $([a]^{\mathbf{M}_2}, [f(a)]^{\mathbf{M}_2}) = (2, 3) \in p^{\mathbf{M}_2}$ et $([f(a)]^{\mathbf{M}_2}, [a]^{\mathbf{M}_2}) = (3, 2) \notin q^{\mathbf{M}_2}$.

(4.a) $[f(f(a))]^{\mathbf{M}_3} = f^{\mathbf{M}_3}(f^{\mathbf{M}_3}(a^{\mathbf{M}_3})) = f^{\mathbf{M}_3}(f^{\mathbf{M}_3}((0, 1))) = f^{\mathbf{M}_3}((1, 1)) = (1, 2)$

(4.b) Raisonnement par récurrence sur n .

(B) Si $n = 0$, alors $[f^0(a)]^{\mathbf{M}_3} = [a]^{\mathbf{M}_3} = a^{\mathbf{M}_3} = (0, 1) = (u_0, u_1)$.

(I) Soit n un entier, en supposant, par hypothèse de récurrence, que $[f^n(a)]^{\mathbf{M}_3} = (u_n, u_{n+1})$, il vient :

$$\begin{array}{ll} [f^{n+1}(a)]^{\mathbf{M}_3} &= [f(f^n(a))]^{\mathbf{M}_3} = f^{\mathbf{M}_3}([f^n(a)]^{\mathbf{M}_3}) \\ &= f^{\mathbf{M}_3}((u_n, u_{n+1})) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (u_{n+1}, u_{n+1} + u_n) && \text{(par définition de } f^{\mathbf{M}_3}) \\ &= (u_{n+1}, u_{n+2}) && \text{(par définition de } u_{n+2}) \end{array}$$