

**Examen partiel du 30/03/2021**

**Durée 1h30**

Téléphones, calculettes et ordinateurs interdits.

Les seuls documents autorisés sont les formulaires des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Dédution Naturelle.

**Inscrire votre nom et votre numéro de groupe (ou jour) de TD sur votre copie.**

**Exercice 1 ((0,5+0,5+0,5+0,5)+(0,5+1+1+1)=5,5 points)**

- On considère les ensembles  $X = \{x, y\}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 = \{f\}$  et  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \{p\}$ . Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer s'il existe une formule  $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  qui vérifie l'affirmation : donner la formule  $F$  si elle existe, sinon expliquer brièvement pourquoi cette formule n'existe pas.
  - une clôture universelle de  $F$  est la formule  $\exists x p(x)$
  - une clôture universelle de  $F$  est la formule  $\forall x p(x)$
  - une clôture universelle de  $F$  est la formule  $\exists x p(f(x, y))$
  - une clôture universelle de  $F$  est la formule  $\forall x p(f(x, y))$
- On considère les symboles  $s_1, s_2, s_3, s_4$  et  $s_5$  appartenant à  $X \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$  à partir desquels on définit la formule  $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  suivante :  $F = (\exists s_1 s_2 (s_3(s_5, s_4, s_1))) \vee (\forall s_4 s_2 (s_3(s_1, s_4, s_5)))$ 
  - Quelles sont les formules atomiques apparaissant dans  $F$  ?
  - Déterminer à quels ensembles chacun des symboles  $s_1, s_2, s_3, s_4$  et  $s_5$  peut appartenir (c-à-d déterminer s'il peut s'agir d'un symbole de variable de  $X$ , d'un symbole de constante de  $\mathcal{F}_0$ , d'un symbole de fonction de  $\mathcal{F}$  ou d'un symbole de prédicat de  $\mathcal{P}$ ).
  - Si l'on suppose que  $s_5$  est un symbole de variable, déterminer  $\text{Free}(F)$  et déterminer une clôture universelle de  $F$ .
  - Calculer  $F[s_4 := s_1]$  (vous pouvez introduire des nouveaux symboles de variable si besoin).

**Exercice 2 (8+8=16 points)**

Avec les règles de la déduction naturelle prouver les deux formules ci-dessous (on pourra utiliser les règles dérivées du formulaire).

$$(A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(\neg A \vee B) \qquad \neg(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$$

**Exercice 3 (0,5+(1+2+1+2)=6,5 points)**

- Soit  $F_1$  et  $F_2$  deux formules de  $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ . Donner la définition mathématique de  $F_1 \models F_2$ .
- A partir d'une formule atomique  $A$ , on définit les formules  $F_1 = (\neg A \Rightarrow (A \vee \neg A)) \Rightarrow A$  et  $F_2 = ((A \wedge \neg A) \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A$ .
  - Etant donnée une structure  $\mathbf{M}$ , calculer les expressions booléennes  $[F_1]^\mathbf{M}$  et  $[F_2]^\mathbf{M}$  en fonction de  $\mathbf{I}_\mathbf{M}(A)$  (sans effectuer de simplification).
  - En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que  $F_1 \models F_2$  (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée).
  - La formule  $F_1$  est-elle satisfiable ? valide ? (justifier)

(d) A-t-on :

(i)  $A \vee F_1 \models \text{false}$  ? (ii)  $F_1 \models \text{true}$  ? (iii)  $\neg A \wedge F_1 \models \text{false}$  ? (iv)  $A \models \neg A \vee F_1$  ?

(justifier)

**Exercice 4 (0,5+(1+3)+(3+3)=10,5 points)**

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$  un ensemble de symboles de fonction où  $\mathcal{F}_0 = \{a, b, c\}$  et  $\mathcal{F}_1 = \{f\}$ .

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  pour l'ensemble  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ .
2. Soit la structure  $\mathbf{M}$  de domaine  $|\mathbf{M}| = \{0, 1, 2\}$  définie par :

$$\begin{aligned} a^{\mathbf{M}} &= 0 & f^{\mathbf{M}} : \{0, 1, 2\} &\rightarrow \{0, 1, 2\} \\ b^{\mathbf{M}} &= 1 & f^{\mathbf{M}}(n) &= (n + 1) \bmod 3 \\ c^{\mathbf{M}} &= 2 \end{aligned}$$

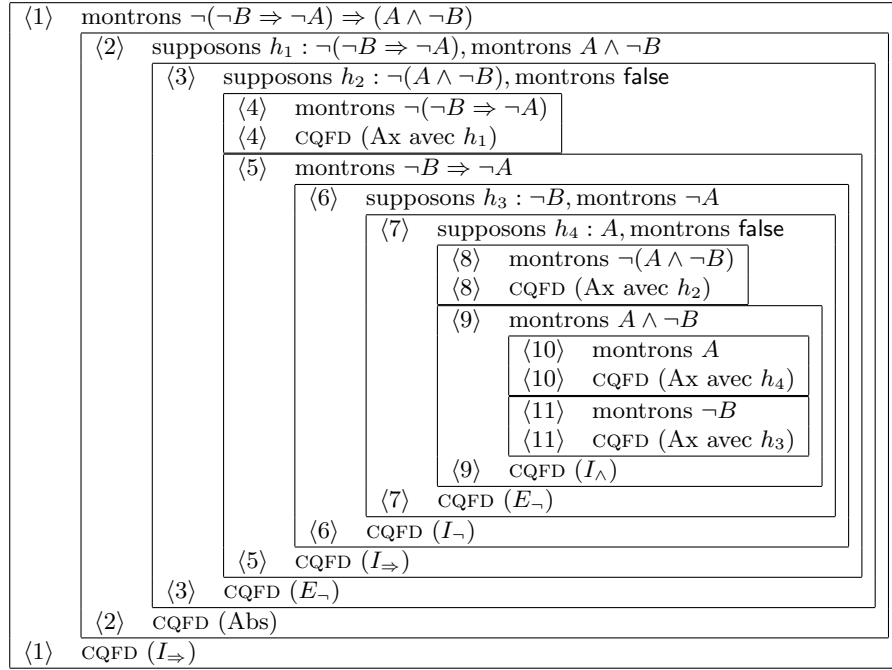
où pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \bmod 3$  désigne le reste de la division entière de  $m$  par 3. On rappelle qu'étant donnés deux entiers quelconques  $q_1$  et  $q_2$ ,  $((q_1 \bmod 3) + q_2) \bmod 3 = (q_1 + q_2) \bmod 3$ . Pour tout terme  $t$ , on note  $f^0(t) = t$  et  $f^{m+1}(t) = f(f^m(t))$ .

- (a) Calculer  $[f^3(b)]^{\mathbf{M}}$ .
  - (b) Montrer (par récurrence sur  $m \in \mathbb{N}$ ) que pour tout symbole de constante  $k \in \mathcal{F}_0$ ,  $[f^m(k)]^{\mathbf{M}} = (m + k^{\mathbf{M}}) \bmod 3$ .
3. On considère maintenant un unique symbole de prédicat  $p$  d'arité 1 ( $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \{p\}$ ) et on définit les formules suivantes :

$$\begin{array}{l|l} F_a = (p(a) \wedge \neg p(f(a))) \Rightarrow \neg p(f(a)) & G_a = p(a) \wedge \neg p(f(a)) \\ F_b = (p(b) \wedge \neg p(f(b))) \Rightarrow \neg p(f(a)) & G_b = p(b) \wedge \neg p(f(b)) \\ F_c = (p(c) \wedge \neg p(f(c))) \Rightarrow \neg p(f(a)) & G_c = p(c) \wedge \neg p(f(c)) \end{array}$$

- (a) Montrer que la formule  $(G_a \wedge (G_b \wedge G_c)) \Rightarrow \neg p(f(a))$  est valide.
- (b) Montrer que la formule  $F_a \wedge (F_b \wedge F_c)$  n'est pas valide.





► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

1.  $F_1 \models F_2$  si et seulement si pour toute structure  $\mathbf{M}$ ,  $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$ .

2.a.

$$\begin{aligned}
 [F_1]^{\mathbf{M}} &= \overline{[\neg A \Rightarrow (A \vee \neg A)]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} = \overline{[\neg A]^{\mathbf{M}}} + \overline{[A \vee \neg A]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} \\
 &= \overline{[A]^{\mathbf{M}}} + ([A]^{\mathbf{M}} + [\neg A]^{\mathbf{M}}) + [A]^{\mathbf{M}} = \overline{[A]^{\mathbf{M}}} + ([A]^{\mathbf{M}} + \overline{[A]^{\mathbf{M}}}) + [A]^{\mathbf{M}} \\
 &= \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + (\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)}) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [F_2]^{\mathbf{M}} &= \overline{[(A \wedge \neg A) \Rightarrow \neg A]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} = \overline{[A \wedge \neg A]^{\mathbf{M}}} + \overline{[\neg A]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} \\
 &= \overline{[A]^{\mathbf{M}} \cdot [\neg A]^{\mathbf{M}}} + \overline{[A]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} = \overline{[A]^{\mathbf{M}} \cdot \overline{[A]^{\mathbf{M}}}} + \overline{[A]^{\mathbf{M}}} + [A]^{\mathbf{M}} \\
 &= \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)
 \end{aligned}$$

2.b. En posant  $x = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ , on a :

$$[F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{\overline{x} + (x + \overline{x})} + x \stackrel{E1.4}{=} \overline{\overline{x} + 1} + x \stackrel{E3.7}{=} \overline{1} + x \stackrel{E1.1}{=} \overline{0} + x \stackrel{E1.2}{=} 0 + x \stackrel{E3.2}{=} x$$

$$\begin{aligned}
 [F_2]^{\mathbf{M}} &= \overline{x \cdot \overline{x} + \overline{x}} + x \stackrel{E4.3}{=} \overline{(\overline{x} + \overline{\overline{x}}) + \overline{x}} + x \stackrel{E1.2}{=} \overline{(\overline{x} + x) + \overline{x}} + x \stackrel{E3.1}{=} \overline{(x + \overline{x}) + \overline{x}} + x \\
 &\stackrel{E1.4}{=} \overline{1 + \overline{x}} + x \stackrel{E3.3}{=} \overline{1} + x \stackrel{E1.1}{=} \overline{0} + x \stackrel{E1.2}{=} 0 + x \stackrel{E3.2}{=} x
 \end{aligned}$$

et donc puisque  $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}} = x = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ , on a bien  $F_1 \models F_2$ .

2.c.  $F_1$  est satisfiable puisque si  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) = 1$  alors  $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$  mais n'est pas valide puisque si  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) = 0$  alors  $[F_1]^{\mathbf{M}} = 0$ .

2.d. (i)  $A \vee F_1 \not\models \text{false}$  : si  $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) = 1$  alors  $[A \vee F_1]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + [F_1]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) = 1$  mais  $[\text{false}]^{\mathbf{M}} = 0$ .

(ii)  $F_1 \models \text{true}$  :  $[\text{true}]^{\mathbf{M}} = 1$  dans toute structure  $\mathbf{M}$  et donc en particulier dans toute structure telle que  $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$

(iii)  $\neg A \wedge F_1 \models \text{false}$  : pour toute structure  $\mathbf{M}$  on a  $[\neg A \wedge F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} \cdot [F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) = 0$  et donc  $\{\mathbf{M} \mid [\neg A \wedge F_1]^{\mathbf{M}} = 1\} = \emptyset \subseteq \{\mathbf{M} \mid [\text{false}]^{\mathbf{M}} = 1\}$

(iv)  $A \models \neg A \vee F_1$  : pour toute structure  $\mathbf{M}$  on a  $[\neg A \vee F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + [F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A) = 1$  et donc en particulier, pour toute structure  $\mathbf{M}$  telle que  $[A]^{\mathbf{M}} = 1$ , on a  $[\neg A \vee F_1]^{\mathbf{M}} = 1$

► CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.

1. Définition inductive de  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$  :

$a \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ ,  $b \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ ,  $c \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$

Si  $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ , alors  $f(t) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ .

2.a.  $[f^3(b)]^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(b^{\mathbf{M}}))) = f^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(1))) = f^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(2)) = f^{\mathbf{M}}(0) = 1$

2.b. Raisonnement par récurrence sur  $m$ .

Si  $m = 0$ , alors  $[f^0(k)]^{\mathbf{M}} = [k]^{\mathbf{M}} = k^{\mathbf{M}} = k^{\mathbf{M}} \bmod 3 = (0 + k^{\mathbf{M}}) \bmod 3$ . Sinon ( $m > 0$ ), par hypothèse de récurrence on a  $[f^m(k)]^{\mathbf{M}} = (m + k^{\mathbf{M}}) \bmod 3$  et on obtient :

$$\begin{aligned} [f^{m+1}(k)]^{\mathbf{M}} &= f^{\mathbf{M}}([f^m(k)]^{\mathbf{M}}) && \text{(par définition)} \\ &= f^{\mathbf{M}}((m + k^{\mathbf{M}}) \bmod 3) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= ((m + k^{\mathbf{M}}) \bmod 3) + 1 \bmod 3 && \text{(par définition de } f^{\mathbf{M}}) \\ &= ((m + 1) + k^{\mathbf{M}}) \bmod 3 && \text{(car } ((q_1 \bmod 3) + q_2) \bmod 3 = (q_1 + q_2) \bmod 3) \end{aligned}$$

3.a. Pour toute structure  $\mathbf{M}$ , on a :

$$\begin{aligned} & [(G_a \wedge (G_b \wedge G_c)) \Rightarrow \neg p(f(a))]^{\mathbf{M}} \\ = & \frac{[G_a]^{\mathbf{M}} \cdot ([G_b]^{\mathbf{M}} \cdot [G_c]^{\mathbf{M}}) + [\neg p(f(a))]^{\mathbf{M}}}{[G_a]^{\mathbf{M}} \cdot ([G_b]^{\mathbf{M}} \cdot [G_c]^{\mathbf{M}}) + [p(f(a))]^{\mathbf{M}}} \\ = & \frac{([p(a)]^{\mathbf{M}} \cdot [\neg p(f(a))]^{\mathbf{M}}) \cdot ([G_b]^{\mathbf{M}} \cdot [G_c]^{\mathbf{M}}) + [p(f(a))]^{\mathbf{M}}}{([p(a)]^{\mathbf{M}} \cdot [p(f(a))]^{\mathbf{M}}) + [G_b]^{\mathbf{M}} \cdot [G_c]^{\mathbf{M}}} \\ \stackrel{E4.3}{=} & \left( \frac{([p(a)]^{\mathbf{M}} \cdot [p(f(a))]^{\mathbf{M}}) + [G_b]^{\mathbf{M}} \cdot [G_c]^{\mathbf{M}}}{([p(a)]^{\mathbf{M}} \cdot [p(f(a))]^{\mathbf{M}}) + [G_b]^{\mathbf{M}} \cdot [G_c]^{\mathbf{M}}} \right) + [p(f(a))]^{\mathbf{M}} \\ \stackrel{E4.3}{=} & \left( \frac{([p(a)]^{\mathbf{M}} + [p(f(a))]^{\mathbf{M}}) + [G_b]^{\mathbf{M}} \cdot [G_c]^{\mathbf{M}}}{([p(a)]^{\mathbf{M}} + [p(f(a))]^{\mathbf{M}}) + [G_b]^{\mathbf{M}} \cdot [G_c]^{\mathbf{M}}} \right) + [p(f(a))]^{\mathbf{M}} \\ \stackrel{E1.2}{=} & \left( \frac{([p(a)]^{\mathbf{M}} + [p(f(a))]^{\mathbf{M}}) + [G_b]^{\mathbf{M}} \cdot [G_c]^{\mathbf{M}}}{([p(a)]^{\mathbf{M}} + [p(f(a))]^{\mathbf{M}}) + [G_b]^{\mathbf{M}} \cdot [G_c]^{\mathbf{M}}} \right) + [p(f(a))]^{\mathbf{M}} \\ \stackrel{E3.1, E3.4}{=} & \left( [p(f(a))]^{\mathbf{M}} + [p(f(a))]^{\mathbf{M}} \right) + ([p(a)]^{\mathbf{M}} + ([G_b]^{\mathbf{M}} \cdot [G_c]^{\mathbf{M}})) \\ \stackrel{E1.4}{=} & 1 + ([p(a)]^{\mathbf{M}} + ([G_b]^{\mathbf{M}} \cdot [G_c]^{\mathbf{M}})) \stackrel{E3.3}{=} 1 \end{aligned}$$

3.b. Avec la structure  $\mathbf{M}$  définie dans la question 2 dans laquelle l'interprétation du prédicat  $p$  est définie par  $p^{\mathbf{M}} = \{1\}$ , on a :

$$[F_b]^{\mathbf{M}} = [(p(b) \wedge \neg p(f(b))) \Rightarrow \neg p(f(a))]^{\mathbf{M}} = \frac{[p(b)]^{\mathbf{M}} \cdot [p(f(b))]^{\mathbf{M}} + [p(f(a))]^{\mathbf{M}}}{[p(b)]^{\mathbf{M}} \cdot [p(f(b))]^{\mathbf{M}} + [p(f(a))]^{\mathbf{M}}} = \frac{1 \cdot 0 + 1}{1 \cdot 0 + 1} = 0$$

car  $b^{\mathbf{M}} = 1 \in p^{\mathbf{M}}$ ,  $[f(b)]^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}(b^{\mathbf{M}}) = 2 \notin p^{\mathbf{M}}$  et  $[f(a)]^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}(a^{\mathbf{M}}) = 1 \in p^{\mathbf{M}}$ . Dans cette structure on obtient donc :

$$[F_a \wedge (F_b \wedge F_c)]^{\mathbf{M}} = [F_a]^{\mathbf{M}} \cdot ([F_b]^{\mathbf{M}} \cdot [F_c]^{\mathbf{M}}) = [F_a]^{\mathbf{M}} \cdot (0 \cdot [F_c]^{\mathbf{M}}) \stackrel{E2.3}{=} [F_a]^{\mathbf{M}} \cdot 0 \stackrel{E2.7}{=} 0$$

et la formule  $F_a \wedge (F_b \wedge F_c)$  n'est donc pas valide.